

Kleines Lehrbuch der Astronomie und Astrophysik

M. Scholz

Band 1: Klassische Astronomie



Die Erde als Beobachtungsort, Sphärische und Positionsastronomie, Himmelsmechanik

M.Scholz

Kleines Lehrbuch der Astronomie und Astrophysik

Band 1: Klassische Astronomie

Die Erde als Beobachtungsort – Sphärische- und Positionsastronomie - Himmelsmechanik

E-Book-Ausgabe 2009

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig.

Bildnachweis: Wikipedia Commons, NASA, ESA, Autor

Kontakt: mathias.scholz@t-online.de

M.Scholz

Kleines Lehrbuch der Astronomie und Astrophysik

Band 1

Klassische Astronomie

Die Erde als Beobachtungsort – Sphärische- und Positionsastronomie - Himmelsmechanik

Ausgabe 2009

mathias.scholz@t-online.de

Inhaltsverzeichnis

DIE ERDE ALS BEOBACHTUNGsort	2
DIE SCHEINBARE HIMMELSKUGEL	2
TÄGLICHE BEWEGUNG, SCHEINBARE SONNENBAHN, ZEITSYSTEME, KALENDER	7
GEOGRAPHISCHE KOORDINATEN	12
MOND UND SCHEINBARE MONDBAHN	15
<i>Mondphasen</i>	17
<i>Libration</i>	18
<i>Gezeiten</i>	20
<i>Sonnen- und Mondfinsternisse</i>	26
SCHEINBARE PLANETENBAHNEN	32
SPHÄRISCHE ASTRONOMIE	41
EINFÜHRUNG IN DIE SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE	41
ASTRONOMISCHE KOORDINATENSYSTEME	44
<i>Koordinatentransformationen</i>	49
<i>Auf- und Untergangszeiten</i>	51
<i>Astronomische Ortsbestimmung</i>	52
ZEITLICHE ÄNDERUNG VON GESTIRNSKOORDINATEN	55
<i>Präzession</i>	56
<i>Nutation</i>	57
<i>Aberration</i>	58
<i>Refraktion</i>	59
<i>Horizontalparallaxe</i>	60
<i>Jährliche Parallaxe</i>	61
<i>Eigenbewegung der Sterne</i>	63
FUNDAMENTALSYSTEME	67
STERNKATALOGE UND STERNATLANTEN	69
<i>Sternbilder</i>	71
HIMMELSMCHANIK	74
MEILENSTEINE DER HIMMELSMCHANIK	78
PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN (KLASSISCHE MECHANIK)	80
BEWEGUNGSGESETZE	80
<i>Erhaltungssätze</i>	82
BEWEGUNG DER HIMMELSKÖRPER IM GRAVITATIONSFELD	85
<i>Zweikörperproblem (Kepler-Problem)</i>	86
<i>Störungen, allgemeines und eingeschränktes Drei- und N-Körperproblem</i>	106

Literatur

Index

Vorwort

Das Ziel dieser mehrbändigen Lehrbuchreihe ist es, grundlegende Erkenntnisse über die Welt außerhalb unserer Erde in systematischer Weise auf einem Niveau, den man im amerikanischen als „undergraduate“ bezeichnen würde, dem Leser näher zu bringen. Dabei wurde sowohl eine gewisse Ausführlichkeit als auch Aktualität (hier etwa 2007) – soweit das bei den einzelnen Themenkomplexen überhaupt möglich ist – angestrebt. Gerade in der Astronomie und Astrophysik beobachtet man gegenwärtig innerhalb kürzester Zeiträume einen enormen Wissenszuwachs, wie man es bei anderen Wissenschaften in diesem Umfang her nur begrenzt kennt. Allein während der Arbeit an dieser Buchreihe erforschte die Raumsonde „Galilei“ das Jupitersystem, erreichte „Cassini“ den Saturn mit seinem komplexen Ringsystem und „Huygens“ die Oberfläche des Saturnmondes Titan; eine ganze Anzahl von „Transplutos“ mit „Eris“ an der Spitze wurden entdeckt, was u.a. dazu führte, daß der neue Begriff „Zwergplanet“ in die astronomische Terminologie eingeführt wurde und die bekannten Merksätze für die Planeten unseres Sonnensystems nur noch bedingt gültig waren und umformuliert werden mußten ...

Während es vor 30 Jahren nicht sonderlich schwierig war, die Anzahl und die Namen der Satelliten der Planeten unseres Sonnensystems aufzusagen, ist das heute längst nicht mehr möglich. Man hat sogar den Eindruck, daß es zunehmend schwieriger wird, für die neuentdeckten Objekte überhaupt Namen zu finden, wie die vielen noch vorläufigen Bezeichnungen der neuentdeckten Jupiter- und Saturnmonde zeigen. Und schließlich soll in diesem Zusammenhang nur noch auf den inflationären Zuwachs an Entdeckungen von Exoplaneten allein im letzten Jahrzehnt hingewiesen werden, die uns viele neue Einsichten in die Struktur und Entstehung von Planeten und Planetensystemen gewährt haben. Gerade an Planeten um weit entfernte Sterne entzündet sich unsere Phantasie, wie die vielen künstlerischen Darstellungen beweisen, die man bei der Recherche im Internet leicht auffinden kann.

Ziel dieser „Einführung“ in die Astronomie und Astrophysik ist es Leser anzusprechen, die einen nicht zu kompakten Einstieg in diese Wissenschaft in deutscher Sprache wünschen und auch daran interessiert sind, an die im Internet oder über Zeitschriften zugängliche Fachliteratur herangeführt zu werden. Angesprochen sind in erster Linie Schüler der Abiturstufe unserer Gymnasien, ihre Lehrer, Studenten der ersten Studienjahre sowie selbstverständlich auch die wachsende Zahl an Liebhaberastronomen (so wie der Autor), die mehr wissen wollen über die Objekte, die sie in ihren „Backyard“- Observatorien oder an Volks- und Schulsternwarten beobachten.

Auf Zitierungen wurde im Text – dem Charakter eines Lehrbuches entsprechend – weitgehend verzichtet. Fachaufsätze lassen sich mittlerweile leicht über Google Scholar oder über das Astrophysics Data System (ADS) recherchieren.

Zum Schluß möchte ich mich noch bei meinem Freunden, Bekannten und Kollegen bedanken, die mich mittelbar und unmittelbar während der Zeit der Erarbeitung dieser Buchreihe unterstützt haben.

M.Scholz
Herbst 2007

Die Erde als Beobachtungsort

Die scheinbare Himmelskugel

Einem Beobachter auf der Erde erscheint der Himmel als ein Gewölbe in Form einer Halbkugel, die durch den natürlichen Horizont begrenzt wird. Man kann sich leicht vorstellen, daß diese Halbkugel unter dem Horizont ihre Fortsetzung findet, so daß man es genaugenommen mit einer Kugel mit dem Beobachter im Zentrum zu tun hat. Diese Kugel wird scheinbare Himmelskugel genannt. Sie ist – wie man erst seit gut 400 Jahren definitiv weiß – ein Abbild des unbegrenzten kosmischen Raumes. Alle kosmischen Objekte und Erscheinungen können von der Erde aus aufgrund ihrer riesigen Entfernungen lediglich als Projektionen auf die Innenseite dieser gedachten Kugel wahrgenommen werden. So ist es nicht verwunderlich, daß die Astronomen der Antike und des Mittelalters davon ausgingen, daß die Erde von einer kristallinen Sphäre umgeben ist, an der man sich die Sterne angeheftet dachte und die sich im Laufe eines Tages einmal um den Beobachter dreht. Diese aus heutiger Sicht naive Vorstellung hielt sich Jahrtausende, da es mit den technischen Möglichkeiten jener Zeit einfach nicht möglich war, z.B. die Erdrotation oder die Bewegung der Erde um die Sonne zweifelsfrei nachzuweisen. Der älteste Versuch, die Rotation der Erde auf mechanischem Wege experimentell zu bestimmen, geht auf JOHANN FRIEDRICH BENZENBERG (1777-1846) zurück. Er stellte 1802 an der Michaeliskirche in Hamburg erfolgreich Fallversuche durch, um die durch die Erdrotation verursachte Ostdrift experimentell nachzuweisen (bei einem 400 m hohen Turm am Äquator macht das ca. 17.6 cm aus). Knapp 50 Jahre später (1851) demonstrierte JEAN BERNARD FOUCAULT (1819-68) in Paris in einem eindrucksvollen Pendelversuch, daß sich die Erde in rund 24 Stunden relativ zum Sternhimmel einmal um ihre eigene Achse dreht. Bereits ein Jahrhundert zuvor (1728) entdeckte der englische Astronom JAMES BRADLEY (1693-1762) die Aberration des Sternlicht, die durch die Bewegung der Erde um die Sonne und durch die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit verursacht wird (bei Sternbeobachtungen muß ein Fernrohr um einen Winkel von rund $20''$ (1 Bogensekunde = $1/3600$ Grad) vorgehalten werden, da die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne von ca. 30 km/s gegen die Geschwindigkeit des Sternlichts (Lichtgeschwindigkeit) zwar sehr klein, aber nicht vernachlässigbar ist). BRADLEY's Entdeckung kann man als den absoluten Beweis für die Richtigkeit des heliozentrischen Weltbildes nach COPERNICUS auffassen, das bis dahin nur den Status einer sehr eleganten Hypothese hatte.

Die geozentrische Weltsicht ist für einen unvoreingenommenen Beobachter, der außer seinen eigenen Augen keine weiteren Hilfsmittel zur Verfügung hat, die offensichtlichste Erklärung dafür, daß die Gestirne im Osten aufgehen, im Süden ihren höchsten Stand erreichen und im Westen wieder untergehen. Diese Sichtweise läßt sich leicht nachvollziehen, wenn man in einer mondlosen Nacht – besonders eindrucksvoll z.B. im Hochgebirge oder bei einer Kreuzfahrt auf See – den Himmel eine zeitlang mit seinen scheinbar Tausenden von Sternen beobachtet. Die Vorstellung der sich bewegendes Himmelskugel erscheint einem irdischen Beobachter derart offensichtlich, daß es verständlich wird, warum es z.B. das heliozentrische Weltbild so schwer hatte, allgemein akzeptiert zu werden. Die geozentrische Sichtweise entspringt – wie wir heute wissen - in erster Linie der Unkenntnis der wahren Entfernungen im Kosmos. Ohne ausgefeilte Hilfsmittel ist es nämlich nicht möglich, die räumliche Tiefe des Alls zu erfassen.

Erst 1838 gelang es dem berühmten Königsberger Astronomen FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846) die Entfernung zu dem Stern 61 Cygni durch extrem genaue Winkelmessungen zu ermitteln, in dem er die parallaktische Verschiebung des Sterns an der Himmelskugel, die sich aufgrund der Bewegung der Erde um die Sonne ergibt, mit einem speziellen Fernrohr (einem Heliometer) bestimmte.

Für einen irdischen Beobachter ist die Himmelskugel Ort allen kosmischen Geschehens. Ihre Bedeutung für die Astronomie soll im Folgenden diskutiert und die Phänomenologie der scheinbaren Bewegung der Himmelskörper auf die Bewegung der Erde um sich selbst und um die Sonne zurückgeführt werden.



Ausschnitt aus der Sommermilchstraße inklusive der Spur eines Perseidenmeteors

Unser Planet, die Erde, ist in erster Näherung eine leicht abgeplattete Kugel mit einem Äquatordurchmesser von 12756.3 km und einem Poldurchmesser von 12713.8 km, die im Laufe eines Tages einmal um ihre Achse rotiert. Der Äquator teilt die Erdkugel in eine Nordhalbkugel und in eine Südhalbkugel. Jeder Punkt darauf kann durch zwei Koordinatenangaben eindeutig identifiziert werden: durch eine Längenangabe (geographische Länge L , Bezugsmeridian ist der Nullmeridian in Greenwich bei London) und durch eine Breitenangabe (geographische Breite φ).

Für einen Beobachter am Punkt (L, φ) ist der Horizont die Schnittlinie seiner Tangentialebene mit der Himmelskugel. Welche Sterne man zu einem konkreten Zeitpunkt am Himmel sehen kann, hängt neben dem Zeitpunkt der Beobachtung entscheidend von der geographischen Breite φ des Beobachterstandpunktes ab. Beobachter auf der Nordhalbkugel sehen nachts z.B. ganz andere Sternbilder als Beobachter auf der Südhalbkugel. Daraus folgt, daß der Anblick des Himmels in gewissem Sinne die Bewegung der Erde um sich selbst, um die Sonne sowie deren Lage relativ zum Beobachter und zu den weit entfernten Sternen widerspiegelt. Um die Bewegungen des Himmels deuten zu können, muß man die Bewegungen der Erde verstehen.

Beobachtet man die Gestirne eine zeitlang, dann bemerkt man, daß sie sich alle auf Kreisen von Ost nach West um einen festen Punkt am Himmel bewegen. Dieser Punkt wird als Himmelspol bezeichnet. Er liegt für einen Beobachter auf der Nordhalbkugel in Nordrichtung und für einen Beobachter auf der Südhalbkugel in Südrichtung. Diese beiden Punkte ergeben sich als Durchstoßungspunkte der verlängerten Erdachse durch die Himmelssphäre. Die tägliche Bewegung der Gestirne um diese Himmelsachse ist also nichts anderes als das Resultat der Rotation der Erde um ihre eigene Achse.



Sternspuren um den Himmelsnordpol. Man erkennt deutlich, daß der Polarstern nicht genau am Himmelspol steht.

Der nördliche Himmelspol ist durch einen nahe gelegenen Stern, der folgerichtig Polarstern oder Polaris (αUMi) genannt wird, ausgezeichnet. Das der Polarstern ziemlich genau am Punkt des nördlichen Himmelspols zu sehen ist, ist mehr ein glücklicher Zufall (z.B. für Globetrotter ohne

GPS) und gilt auch nur für die heutige Zeit. Wie noch gezeigt wird, ändert sich der Ort des Himmelspols unter den Sternen langsam im Laufe der Zeit aufgrund einer Präzessionsbewegung der Erdachse, so daß im Laufe von Jahrtausenden auch andere Sterne, z.B. die Wega im Sternbild Leier, irgendwann einmal in die Nähe des Himmelspols kommen und damit zum „Polarstern“ werden. In der Nähe des südlichen Himmelspols befindet sich übrigens kein hellerer und damit auffälliger Stern.

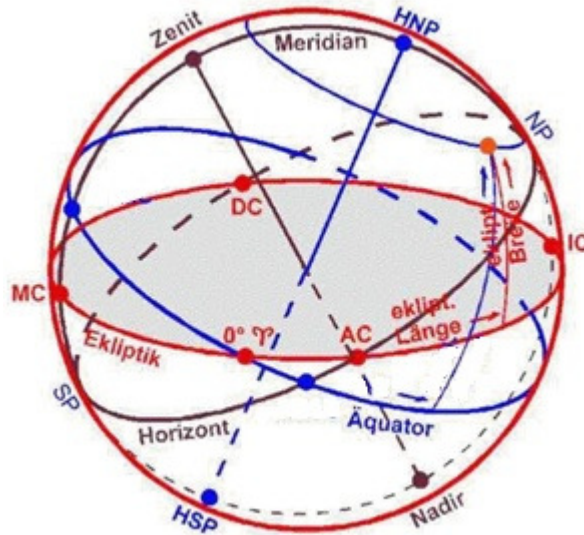
Der Winkel, unter dem der Himmelspol in bezug auf den Nordpunkt bzw. (Südhalbkugel) Südpunkt des Horizonts erscheint, wird als Polhöhe bezeichnet. Die Polhöhe entspricht zugleich der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes. Man kann also durch Polhöhenmessungen leicht die geographische Breite seines Standortes bestimmen.

Der Punkt, der sich genau senkrecht über dem Beobachter befindet, nennt man Zenit (wenn die Sonne im Zenit steht, wirft ein Gnomon - das ist ein in der Antike oft verwendeter Schattenstab - keinen Schatten). Sein Gegenpunkt im unsichtbaren Teil der Himmelskugel ist der Nadir. Den Grundkreis im System der scheinbaren Himmelskugel bildet der wahre mathematische Horizont, der sich aus der Parallelverschiebung des scheinbaren Horizonts eines Beobachters zum Erdmittelpunkt ergibt. Der scheinbare Horizont des Beobachters entspricht der Schnittlinie der Tangentialebene seines Standortes auf der Erdoberfläche mit der Himmelskugel. Er kann bei Winkelmessungen durch einen sogenannten künstlichen Horizont ersetzt werden, z.B. durch die spiegelnde Oberfläche eines Gefäßes mit flüssigem Quecksilber. Genaugenommen gibt der Quecksilberhorizont nicht genau den mathematischen Horizont wieder. Vielmehr zeigt seine Senkrechte zur Oberfläche in Richtung des lokalen Schwerzentrums, die nicht unbedingt mit dem Erdmittelpunkt übereinstimmen muß (auf diese Weise können Geologen Schwereanomalien auf der Erde bestimmen).

Für die meisten astronomischen Anwendungen, insbesondere der Positionsbestimmung weit entfernter Objekte, ist es unerheblich, ob man den Standort des Beobachters auf der Erde (d.h. topozentrisch) oder den rund 6300 km entfernten Erdmittelpunkt (d.h. geozentrisch) als Mittelpunkt der Himmelskugel betrachtet. Bei der Berechnung von Sonnenfinsternissen oder Sternbedeckungen durch den Mond ist dieser Unterschied jedoch auf keinen Fall zu vernachlässigen. Ansonsten erhält man zwangsläufig fehlerhafte Vorhersagen.

Wenn man sich eine genau auf der Himmelsachse senkrecht stehende und durch den Erdmittelpunkt gehende Ebene vorstellt, dann bildet deren Schnittlinie mit der Himmelskugel den Himmelsäquator. Dieser teilt die Himmelskugel in einen nördlichen und einen südlichen Teil. Auf der nördlichen Halbkugel der Erde erreicht er seine größte Höhe über dem Horizont genau in Südrichtung (im Winter, wenn das Sternbild Orion kulminiert, dann entsprechen die drei auffälligen Gürtelsterne ungefähr der Position des Himmelsäquators über dem Horizont). Diese Höhe ist abhängig von der geographischen Breite des Beobachtungsortes und wird als Äquatorkulm bezeichnet. Die Gesamtheit der Sternbilder, die sich zum größten Teil nördlich des Himmelsäquators befinden, bilden dann den nördlichen Sternhimmel. Der südliche Sternhimmel besteht entsprechend aus den Sternbildern, die hauptsächlich südlich des Himmelsäquators stehen. Für einen Beobachter in mittleren geographischen Breiten der Nordhalbkugel sind im Laufe eines Jahres alle Sternbilder des nördlichen, aber auch eine ganze Anzahl des südlichen Sternhimmels sichtbar, da sich der Himmelsäquator immer über dem Horizont befindet.

Alle Sterne bewegen sich bei ihrem täglichen Lauf von Ost nach West auf Kreisen, die parallel zum Himmelsäquator liegen. Wenn sie dabei den Nord-Süd-Kreis schneiden, spricht man von einer Kulmination. Dieser Großkreis, der auch durch den Himmelspol und den Zenit verläuft, bildet den Himmelsmeridian oder kurz Meridian (Mittagslinie) des Beobachtungsortes. Der Name „Mittagslinie“ kommt daher, daß die Sonne bei ihrer scheinbaren Bewegung von Ost nach West diesen Großkreis genau zum Zeitpunkt des „wahren Mittags“ schneidet (ein Schattenstab oder Gnomon wirft zu diesem Zeitpunkt seinen längsten Schatten). Anders ausgedrückt ist der Meridian der vom Erdmittelpunkt aus auf die Himmelskugel projizierte Längengreis des Beobachtungsortes.



Scheinbare Himmelskugel mit den wichtigsten Großkreisen. HNP=Himmelsnordpol, HSP=Himmelssüdpol, NP=Nordpunkt, SP=Südpunkt

Als Großkreise werden die Schnittlinien von Ebenen mit der Himmelskugel bezeichnet, die durch den Mittelpunkt der Himmelskugel verlaufen. Alle anderen Schnittlinien bilden Kleinkreise.

Wenn ein Gestirn seine größte Höhe über dem Horizont erreicht hat, dann steht es genau im Meridian und befindet sich damit in oberer Kulmination. Wenn es dagegen seinen tiefsten Punkt erreicht (der i.d.R. unsichtbar ist, da er sich z.B. unter dem Nordhorizont befindet), dann spricht man von einer unteren Kulmination. In Gegenden nördlich des Polarkreises kann im Sommer die Sonne auch bei ihrer unteren Kulmination über dem Horizont bleiben. Es ist Polartag (im Gegensatz zur Polarnacht, wo die Sonne überhaupt nicht über den Horizont steigt). Sterne, die analog zur Sonne auch bei ihrer unteren Kulmination über dem Horizont bleiben, bezeichnet man als zirkumpolar.

Der Meridian schneidet den Himmel in eine östliche und westliche Hälfte. Ein weiterer Kreisbogen verläuft von Osten über den Zenit zum Westpunkt. Er wird als „Erstes Vertikal“ bezeichnet (im Allgemeinen bezeichnet man jeden Großkreis, der durch Zenit und Nadir verläuft, als Vertikalkreis).

Tägliche Bewegung, scheinbare Sonnenbahn, Zeitsysteme, Kalender

Die meisten Menschen wissen (auch wenn sie in Großstädten leben), daß die Sonne im Osten aufgeht und im Westen wieder unter und daß diese Erscheinung nur eine Widerspiegelung der Rotation der Erde um ihre eigene Achse ist. Das gilt natürlich nicht nur für die Sonne, sondern für alle Gestirne am Himmel. Man bezeichnet diese Bewegung als scheinbare Rotation der Himmelskugel um die Himmelsachse. Eine solche Rotation ist vollendet, wenn sich ein Stern nach einer Umdrehung wieder an der gleichen scheinbaren Position (z.B. im Meridian bei seiner oberen Kulmination) befindet. Die Umdrehungsdauer der Himmelskugel kann also aus dem zeitlichen Abstand zweier Meridiandurchgänge eines Sterns bestimmt werden. Man bezeichnet diesen zeitlichen Abstand deshalb auch als Sterntag. Er beträgt

23 Stunden, 56 Minuten und 04.0905 Sekunden

und entspricht damit genau der Rotationsdauer der Erde.

Bestimmt man jedoch die Tageslänge über ein Jahr hinweg aus dem Meridiandurchgang der Sonne (fester Ort vorausgesetzt) und mittelt die Ergebnisse, dann ergibt sich ein um rund 4 Minuten längerer Tag:

24 Stunden

Dieser Tag wird als mittlerer Sonnentag bezeichnet und berücksichtigt die (aufgrund der Ellipsenbahn) ungleichförmige Bewegung der Erde um die Sonne sowie die Neigung der Sonnenbahn (Ekliptik) gegenüber dem Himmelsäquator.

Ein wahrer Sonnentag ist dagegen die konkrete Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Meridiandurchgängen der Sonne an einem gegebenen Ort (der Zeitpunkt eines Meridiandurchganges der Sonne an einem gegebenen Ort wird als wahrer Mittag bezeichnet). Er weicht im Laufe des Jahres periodisch vom mittleren Sonnentag ab, wobei die Abweichung durch die Zeitgleichung beschrieben wird. Es gilt:

Zeitgleichung $Z = \text{Wahre Sonnenzeit} - \text{Mittlere Sonnenzeit}$

Sie kann mit folgender Näherungsformel berechnet werden:

$$Z = 9.87 \sin(2B) - 7.53 \cos B - 1.5 \sin B$$

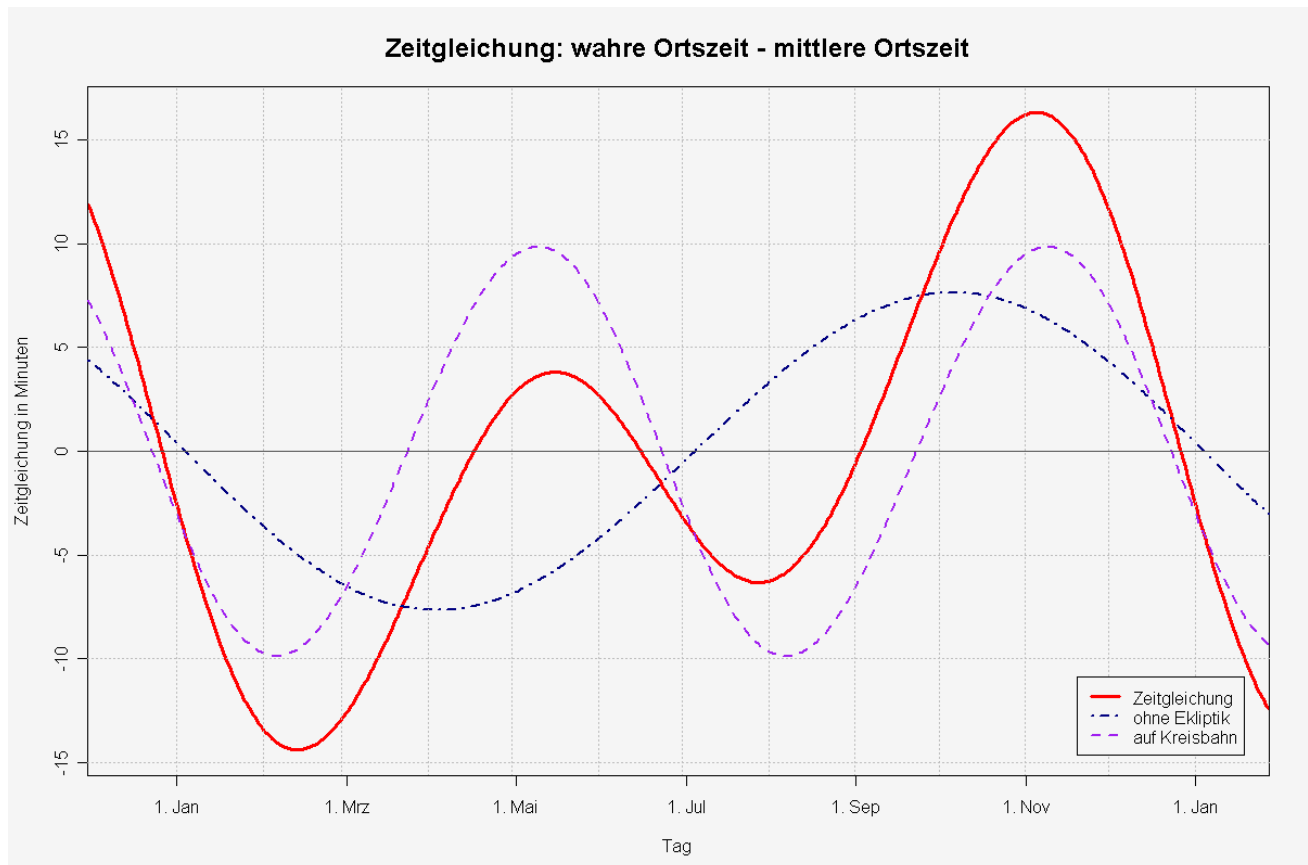
$$B = 360 (N - 81) / 364$$

$N = \text{Nummer des Tags (1. Januar} \rightarrow N=1)$

[1.1]

Die mittlere Sonnenzeit ist für jeden Meridian verschieden. Aus diesem Grund werden bestimmte Gebiete auf der Erde, die durch ihre geographische Länge charakterisiert werden, zu sogenannten Zeitzonen zusammengefaßt, wobei jede Zeitzone ihren eigenen Bezugsmeridian besitzt. Die Mitteleuropäische Zeit bezieht sich z.B. auf 15° östliche Länge.

Die mittlere Weltzeit – auch Universal Time (UT) genannt – ist die mittlere Sonnenzeit bei $L = \pm 0^\circ$, dem Meridian, der durch die Sternwarte von Greenwich geht. Sie wird auch als UT0 bezeichnet. Da die Rotation der Erdachse für genaueste Zeitmessungen nicht gleichmäßig genug ist (es kommt zu periodischen Abweichungen, z.B. durch die Präzession und Nutation der Erdachse und zu säkularen Schwankungen wie z.B. durch die Gezeitenreibung im Erde-Mond-System), verwendet man in der Astronomie gern die Zeit UT1 bzw. UT2. Diese Zeitsysteme sind weitgehend von den störenden Einflüssen der Erdrotation befreit, wobei UT2 auch von saisonalen Effekten korrigiert ist.



Als Zeitgleichung bezeichnet man die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit

Eine sehr genaue und von der Erdrotation unabhängige Zeitmessung wurde durch den Einsatz von Atomuhren möglich. Die daraus abgeleitete Zeit nennt man „Internationale Atomzeit“ TA1 bzw. (bei direkter Anbindung an die Sonnenzeit) Koordinierte Weltzeit UTC. Heute definiert man die Länge einer Sekunde über die Anzahl der Schwingungsperioden der Strahlung, die bei einem bestimmten Hyperfeinstruktur-Übergang des Grundzustandes eines Cäsium-Atoms abgestrahlt wird. Die sich daraus ergebende Zeiteinheit nennt man Atomzeitsekunde im Gegensatz zur Sonnenzeitsekunde, die aus der mittleren Sonnenzeit abgeleitet wird. Beide „Sekunden“ unterscheiden sich ein wenig. Die Atomzeitsekunde ist etwa $4 \cdot 10^{-8}$ s kürzer als die Sonnenzeitsekunde.

Die UTC wurde 1972 eingeführt. Auf diese Zeit beziehen sich alle amtlichen Zonenzeiten der insgesamt 24 Zeitzonen. Die Synchronisation erfolgt z.B. über die Zeitzeichen diverser Zeitdienste, die dem ganzzahligen Teil einer UT1-Sekunde entsprechen. Da die UTC nur aus ganzzahligen Sekundensignalen aufgebaut ist (maximale Abweichung von 0,9 s zu UT1; Korrektur mit einer

Schaltsekunde wenn die Differenz zu UT1 größer als 0,7 s wird) muß von Zeit zu Zeit eine Schaltsekunde eingeführt oder weggelassen werden. Dies erfolgt am 31. Dezember /1. Januar und gegebenenfalls am 30. Juni /1. Juli, um sich der nicht ganz gleichförmigen Weltzeit UT1 wieder anzugleichen.

Alle Gestirne an der Himmelskugel beschreiben bei ihrer täglichen Bewegung Kreise, die parallel zum Himmelsäquator verlaufen. Die meisten von ihnen gehen deshalb in der Osthälfte des Horizonts auf und in der Westhälfte unter. Den Teil ihrer Bahn, den sie über dem Horizont zurücklegen, nennt man den Tagbogen. Entsprechend wird der Bogen, der unter dem Horizont verläuft, Nachtbogen genannt.

Gestirne, deren Positionen sich nördlich des Himmelsäquators befinden, gehen nördlich des Ostpunktes auf und nördlich des Westpunktes unter. Ihr Tagbogen ist deshalb (für einen Beobachter auf der Nordhalbkugel der Erde) länger als der Tagbogen von Gestirnen, die sich südlich des Himmelsäquators befinden. Daraus folgt, daß Gestirne mit größeren Tagbogen auch länger sichtbar sind.

Als Zirkumpolarsterne bezeichnet man Sterne, die bei ihrer täglichen Bewegung immer über dem Horizont bleiben, wie z.B. für Deutschland die Sterne des großen und kleinen Wagens (Bär). Daneben gibt es natürlich auch Sterne, die für einen gegebenen Beobachtungsort immer unter dem Horizont bleiben, so z.B. für Mitteleuropa die Sterne des Kreuzes des Südens.

Beobachtet man von einem Standort auf der nördlichen Halbkugel aus über ein paar Jahre hinweg den Lauf der Sonne auf der Himmelskugel, dann kann man unschwer einige Regelmäßigkeiten entdecken. So verändert sich der Aufgangs- und Untergangspunkt der Sonne am Horizont im Laufe eines Jahres. Am Tag des Frühlingsanfangs, also um den 21. März herum, geht die Sonne genau im Osten auf und genau im Westen unter. Im Sommerhalbjahr wandert der Aufgangs- und Untergangspunkt immer weiter in nördliche Richtung, um am Tag der Sommersonnenwende ein Maximum zu erreichen. Von diesem Tag an nimmt die Morgen- und Abendweite (das ist der Winkelabstand auf dem Horizont zwischen Ost- und Aufgangspunkt bzw. West- und Untergangspunkt der Sonne) wieder ab, bis am Tag des Herbstanfangs (um den 21. September) die Sonne wieder genau am Ostpunkt auf und am Westpunkt untergeht. Im Winterhalbjahr befindet sich der Aufgangs- und Untergangspunkt immer südlich des Ost- bzw. Westpunktes und der Tagbogen der Sonne erreicht am Tag der Wintersonnenwende seinen kleinsten Wert.

Der jeweilige Wert der Morgen- und Abendweite und damit auch die Dauer von Tag und Nacht hängt von der geographischen Breite ϕ des Beobachtungsortes ab.

Der Grund für diese Eigentümlichkeiten der Sonnenbahn liegt darin, daß die Ebene der Sonnenbahn am Himmel gegenüber der Ebene des Himmelsäquators um 23.5° geneigt ist. Die scheinbare Sonnenbahn im Laufe eines Jahres an der Himmelskugel wird als Ekliptik bezeichnet und der besagte Winkel als Schiefe der Ekliptik ε . Oder anders ausgedrückt, die Ekliptik ist der Schnittkreis der Erdbahnebene mit der Himmelskugel. Dadurch, daß die Erdachse gegenüber der Erdbahnebene um 23.5° geneigt ist, ergeben sich über das Jahr hinweg für einen Ort auf der Erde sich ändernde Einstrahlungsbedingungen, die – in zeitliche Abschnitte eingeteilt – als Jahreszeiten bezeichnet werden. Am 21. Juni ist die nördliche Hemisphäre etwas auf die Sonne zugeneigt. Die Sonne steht

für einen Ort, der sich auf dem nördlichen Wendekreis befindet, zu Mittag genau im Zenit. Auf der Nordhalbkugel beginnt der Sommer und auf der Südhalbkugel der Winter. Am 22. Dezember ist es dann genau umgekehrt. In Australien kann man Weinachten im Sommer feiern ...

Nach einem vollen Umlauf auf der Ekliptik erreicht die Sonne nach genau 365.25637 mittleren Sonnentagen wieder die gleiche Position unter den Sternen. Diese Jahreslänge wird deshalb auch als Siderisches Jahr bezeichnet. Das Jahr, das sich aus zwei Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt ergibt, ist aufgrund der Präzession der Erdachse etwas kürzer. Es besteht aus 365.24220 mittlere Sonnentagen und wird als Tropisches Jahr bezeichnet.

Der Fakt, daß ein Jahr nicht durch eine ganze Zahl dargestellt werden kann, bringt Probleme im Kalenderwesen mit sich. Diese Probleme umgeht man im Gregorianischen Kalender, in dem man nach einem bestimmten System Schalttage einfügt. Die Schaltregel besagt, daß man in den Jahren, bei denen die Jahreszahl ohne Rest durch 4 teilbar ist, den Monat Februar mit 29 anstatt 28 Tagen rechnet. Außerdem gelten nur die Jahre mit einer vollen Jahrhundertzahl als Schaltjahre, wenn sie ohne Rest durch 400 teilbar sind. Das Jahr 1900 war deshalb kein Schaltjahr, sondern ein Gemeinjahr während das Jahr 2000 ein Schaltjahr war.

Im Gregorianischen Kalender wird also folgende Näherung für das Tropische Jahr verwendet und als Bürgerliches Jahr (oder kurz Kalenderjahr) bezeichnet:

$$365.2425 \text{ Tage} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} \text{ Tage} \quad [1.2]$$

Der Name „Gregorianischer Kalender“ kommt von Papst GREGOR XIII (1502-1585), der im Jahre 1582 auf Ratschlag des Astronomen CHRISTOPH CLAVIUS (1537-1612) eine Kalenderreform durchführen ließ, um die kirchlichen Feiertage wieder mit den natürlichen Abläufen in Einklang zu bringen.

Die Einteilung des bürgerlichen Jahres in Monate mit unterschiedlichen Tageszahlen macht es schwierig, Datumsdifferenzen zu berechnen. Aus diesem Grund hat man eine von einem vorher festgelegten Datum beginnende Tageszählung eingeführt, die man als Julianisches Tageszählung bezeichnet (sie hat nichts mit dem sogenannten Julianischen Kalender zu tun, der von einer Jahreslänge von 365.25 Tagen ausgeht und sich aus dem römischen Kalender entwickelte). Man findet sie nicht nur bei astronomischen Anwendungen. Sie wird heute auch (in abgewandelter Form) zur Datumsberechnung in Computern verwendet.

Als Julianisches Datum (JD) bezeichnet man demnach die Anzahl der mittleren Sonnentage, die seit dem 1. Januar des Jahres 4713 v.Chr., 12 Uhr UT, verstrichen sind. Stunden, Minuten und Sekunden werden in dezimaler Form in Tagesbruchteilen angegeben.

Das Julianische Datum wurde 1581 von JOSEPH JUSTUS SCALIGER (1540-1609) eingeführt, einem der berühmtesten Philologen seiner Zeit. Mit seinen Schriften *Opus novum de emendatione temporum* (1581), *Opus de emendatione temporum* (1583) und *Thesaurus temporum* (1609) schuf er wichtige Abhandlungen zur antiken Chronologie.

Umrechnung von Bürgerliches Datum in Julianisches Datum (JD) und umgekehrt

Gegeben: Jahr y , Monat m , Tag d , Weltzeit UT1

$$JD = \text{int}(365.25a) + \text{int}(30.6001(b+1)) + d + 2 - \text{int}\left(\frac{a}{100}\right) + \text{int}\left(\frac{a}{400}\right) + 1720994.5 \frac{UT1}{24}$$

mit

$$a = y, \text{ wenn } m \geq 3 \quad \text{oder} \quad a = y - 1, \text{ wenn } m = 1 \text{ oder } m = 2$$

$$b = m, \text{ wenn } m \geq 3 \quad \text{oder} \quad b = m + 12, \text{ wenn } m = 1 \text{ oder } m = 2$$

Gegeben: JD

$$dd = B - D - \text{int}(30.6001 E) + F$$

$$m = E - 1, \text{ wenn } E < 13.5 \quad \text{oder} \quad m = E - 13, \text{ wenn } E \geq 13.5$$

$$y = C - 4716, \text{ wenn } m > 2.5 \quad \text{oder} \quad y = C - 4715, \text{ wenn } m \leq 2.5$$

mit

$$I = \text{int}(JD + 0.5)$$

$$F = \text{frac}(JD + 0.5)$$

$$A = I, \text{ wenn } I < 2299161$$

$$A = I + 1 + X - \text{int}\left(\frac{X}{4}\right), \text{ mit } X = \text{int}\left(\frac{I - 1867216.25}{36524.25}\right), \text{ wenn } I \geq 2299161$$

$$B = A + 1524$$

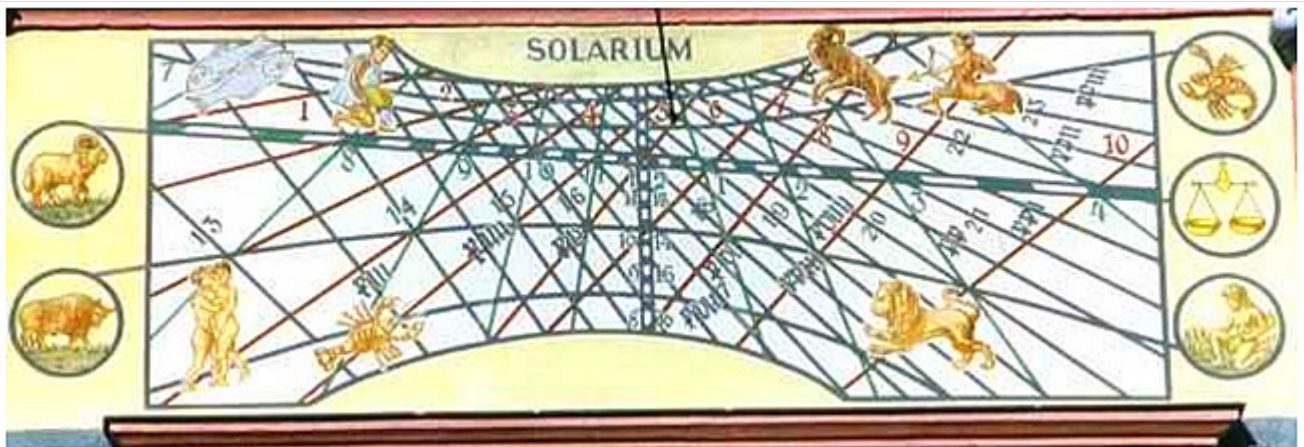
$$C = \text{int}\left(\frac{B - 122.1}{365.25}\right)$$

$$D = \text{int}(365.25 C)$$

$$E = \text{int}\left(\frac{B - D}{30.6001}\right)$$

Die Ekliptik ist für einen Beobachter auf der Erde auch dadurch ausgezeichnet, daß sich in deren unmittelbaren Nähe alle sichtbaren Planeten und der Mond bewegen. Der Grund dafür ist, daß die Mondbahn und die Planetenbahnen nur gering gegenüber der Erdbahnebene geneigt sind. Deshalb kommt es auch gar nicht so selten vor, daß der Mond ab und zu einen Planeten oder sogar die Sonne verdeckt. Letztere Erscheinung ist als Sonnenfinsternis bekannt.

Seit alters her haben die Sternbilder, die von der Ekliptik geschnitten werden, eine besondere Bedeutung. Sie bilden den Zodiakus – den Tierkreis und bestehen aus 12 Sternbildern. Ein Tierkreiszeichen umfaßt einen Abschnitt von $360^\circ/12 \text{ Monate} = 30^\circ$ der Tierkreiszone und wird jeweils einem Sternbild zugeordnet.



Der Tierkreis hat eine wichtige Bedeutung in der Sterndeutungskunst. Vor dem Aufkommen der modernen Astronomie war die Erstellung von Horoskopen eine durchaus ernsthafte Beschäftigung von professionellen Astronomen. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der berühmten Sonnenuhr von ZACHARIAS SCULTETUS (1530 - 1560) an der Apotheke in der Altstadt von Görlitz. Sie ist um 1550 entstanden und kann noch heute in einem sehr gut restaurierten Zustand bewundert werden.

Folgende Sternbilder gehören dem Tierkreis an: Aries (Widder), Taurus (Stier), Gemini (Zwillinge), Cancer (Krebs), Leo (Löwe), Virgo (Jungfrau), Libra (Waage), Scorpius (Skorpion), Sagittarius (Schütze), Capricornus (Steinbock), Aquarius (Wassermann) und Pisces (Fische).

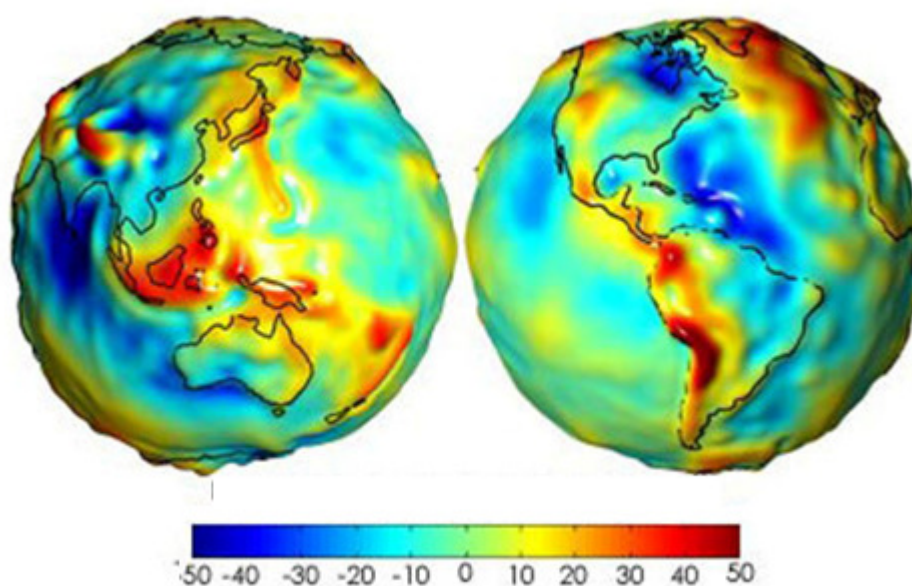
Geographische Koordinaten

Die genaue und reproduzierbare Festlegung von Positionen auf der Erde erfordern ein entsprechendes Koordinatensystem. Solch ein Koordinatensystem wurde zuerst unabhängig von der wahren Form der Erde definiert, die ja nur in erster Näherung eine Kugel ist. Auf einer Kugel läßt sich bekanntlich die Position eines Punktes durch zwei Angaben in Form eines Winkelmaßes eindeutig festlegen, wenn zuvor zwei Großkreise als Bezugskreise definiert worden sind. Auf der Erde bilden der Nullmeridian (der durch beide Erdpole und durch die Sternwarte in Greenwich geht) und der Äquator diese Bezugskreise. Damit läßt sich jeder Punkt auf der Erde (die Pole ausgenommen) eindeutig durch eine geographische Länge λ und durch eine geographische Breite φ bezeichnen.

Solch eine Ortsbestimmung – genauer die Bestimmung der geographischen Breite - wurde vor der GPS-Ära meistens mit astronomischen Methoden durchgeführt. Eine einigermaßen verlässliche Längenbestimmung ist jedoch erst mit dem Aufkommen von sehr genau gehenden mechanischen Uhren (Schiffschronometer, JOHN HARRISON (1693-1776)) möglich geworden.

Nun ist schon seit dem 18. Jahrhundert bekannt, daß die Form der Erde sowohl global als auch lokal stark von einer idealen Kugel abweicht. So ist der Äquatordurchmesser der Erde um ca. 42.5 km größer als der Poldurchmesser, was einer Abplattung von 0.003 entspricht. Eine bessere Annäherung an die wahren Verhältnisse bekommt man, wenn anstelle einer Kugel ein Ellipsoid verwendet. In diesem Fall ist die Position eines Punktes eindeutig durch die ellipsoiden Koordinaten B und L festgelegt.

Wenn man die Form der Erde noch genauer bestimmt, dann findet man auf ihr Abweichungen in Form von Ausbeulungen und Dellen, die sich durch Schwerkraftmessungen nachweisen lassen. Als Referenzfläche kann z.B. die Oberfläche der Weltmeere dienen (das sogenannte „Normal Null“ – NN), da sich eine Flüssigkeitsoberfläche immer senkrecht zur Richtung der Schwerkraft einstellt. Denkt man sich diese Wasserfläche von den Auswirkungen der Gezeiten und von Luftdruckschwankungen befreit und nimmt man weiter an, daß sie sich unter den Kontinenten fortsetzt, dann bildet der mittlere Meeresspiegel eine Fläche gleicher Schwerebeschleunigung $g = \text{const.}$ (eine sogenannte Äquipotentialfläche). Die ziemlich komplizierte geometrische Form, die sich dabei ergibt, bezeichnet man als Geoid.



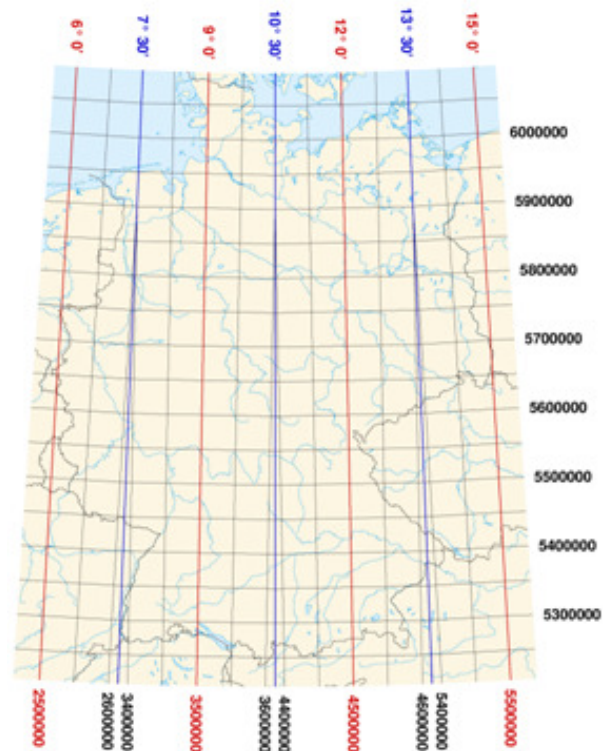
Geoid – dargestellt durch die Gravitationsfeldanomalien der Erde (Farbcodierung in Milligal)

Stellt man die Abweichungen zu einem idealen Ellipsoid mit den Ausmaßen der Erde stark überhöht dar, dann erkennt man, daß die Erde im Mittel eine sehr unregelmäßige Form besitzt, die mehr der einer Kartoffel als der einer Kugel ähnelt.

Dieser Fakt erschwert natürlich die Festlegung eines Koordinatensystems, welches neben den Winkelangaben natürlich auch absolute Entfernungs- und Höhenmessungen erlauben muß um alltagstauglich zu sein. Eine Lösung dieses Problems stellen die sogenannten Referenzellipsoide dar. Darunter versteht man Ellipsoide, deren Mittelpunkte mit dem Erdmittelpunkt zusammenfallen und deren Achsen so ausgerichtet sind, daß ein Teil der Oberfläche eine bestimmte geographische Region (z.B. Europa) möglichst genau approximiert. Als „geodätisches Datum“ wird in der Geodäsie die Größe bezeichnet, welches solch ein Referenzellipsoid vollständig definiert. Wenn man für einen bestimmten Ort auf der Erde dessen geographischen Koordinaten angibt (z.B. im Gauß-Krüger-System, s.u.), muß man der Vollständigkeit halber das geodätische Datum immer mit angeben. Bekannte Referenzellipsoide sind z.B. das Bessel-Ellipsoid und das Krassovsky-Ellipsoid. Daneben existiert noch eine große Anzahl von nationalen Ellipsoiden, welche die jeweiligen Länder besonders gut approximieren.

Für die Kartographie sind Koordinatensysteme auf der Erdoberfläche besser geeignet, die als Koordinaten echte Abstände – also in Metern oder Kilometern – verwenden. Solch ein Koordinatensystem geht auf den Göttinger Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUß (1777-1855) und auf JOHANN HEINRICH LOUIS KRÜGER (1857-1923) zurück. KRÜGER veröffentlichte auf der Grundlage von Aufzeichnungen aus dem Gauß-Archiv 1912 die Arbeit *„Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene“*, auf deren Grundlage das Gauß-Krüger-System entwickelt wurde, welches seit 1923 in Deutschland amtlich benutzt wird.

Er ging in seinen Überlegungen von einem Bessel-Ellipsoid aus wobei die Idee darin bestand, die Erde in jeweils 3° breite Meridianstreifen aufzuteilen, deren Mittelmeridian mit den jeweiligen Längengraden zusammenfällt. Beginnend mit „0“ erhält jeder dieser Meridianstreifen eine Kennziffer, wobei in Ostrichtung positiv und in Westrichtung negativ gezählt wird. 9° westliche Länge hat demnach die Kennzahl „-3“ und 12° östliche Länge die Kennzahl „+4“. Um die Koordinaten eines Ortes festzulegen, verwendet man im Gauß-Krüger-System eine Mercator-Projektion. In dieser Projektion stehen die x- und y-Achse immer senkrecht aufeinander und folgen somit nicht den bogenförmigen Verlauf der Längen- und Breitenkreise. Der x-Wert eines Punktes gibt dann die Entfernung zum Äquator und der y-Wert die Entfernung zum Bezugsmeridian mit der Nummer n an. In der Geodäsie wird die x-Koordinate als „Hochwert“ und die y-Koordinate – mit der vorangestellten Kennziffer – als „Rechtswert“ bezeichnet. Die Skalierung der Achsen erfolgt dabei gewöhnlich in Metern. Um negative Werte bei den y-Werten zu vermeiden, werden diesem Wert immer 500.000 m hinzu addiert.



Gauß-Krüger-Koordinatennetz über Deutschland

Bei bestimmten astronomischen Beobachtungen – z.B. von erdbahnkreuzenden Planetoiden oder anderen relativ nahen Objekten im Sonnensystem – ist die genaue geographische Position des Beobachters sehr wichtig. Gestirnspositionen, die nur für einen bestimmten Beobachtungsort und einer bestimmten Beobachtungszeit gelten, bezeichnet man als topozentrisch. Sie müssen – bevor man sie z.B. für eine Bahnbestimmung verwenden kann, für einen fiktiven Beobachter im Erdmittelpunkt umgerechnet werden (geozentrische Koordinaten). In der astronomischen Praxis tritt der umgekehrte Fall noch häufiger auf: Geozentrische Koordinaten sind in topozentrische zu transformieren. Wenn die geographischen Koordinaten des Beobachtungsortes genügend genau bekannt sind, macht auch das keine sonderlich großen Schwierigkeiten.

Mond und scheinbare Mondbahn

Der auffälligste Himmelskörper neben der Sonne ist zweifellos der Mond. Insbesondere sein periodisch wechselndes Aussehen in Form der Mondphasen haben die Menschen schon früh animiert, ihn als natürlichen Zeitmesser zu verwenden. Dazu kommt noch, daß er der einzige kosmische Körper ist, den man – neben der Sonne – mit freiem Auge als Scheibe wahrnehmen kann. Daraus resultiert die herausragende Stellung, die der Mond sowohl in der Mythologie antiker Völker als auch in der antiken Astronomie innehat.

Der Mond vollzieht ebenso wie die anderen Himmelskörper an der Himmelskugel eine tägliche Bewegung, d.h. er geht im Osten auf und im Westen unter. Neben dieser scheinbaren Bewegung hat er auch noch eine Eigenbewegung relativ zur Himmelskugel und zwar von West nach Ost. Sie ist das Abbild der wahren Bewegung des Mondes um die Erde. Für einen kompletten Umlauf benötigt der Mond genau 27 Tage, 7 Stunden und 11.5 Sekunden ($=27.32166$ Tage). Diesen Zeitraum bezeichnet man als siderischen Monat.

Die Zeit, die der Mond von z.B. einem Vollmond zum nächsten benötigt, ist etwas länger. Der Grund dafür ist, daß sich das gesamte System Erde-Mond zusätzlich um die Sonne bewegt. Das äußert sich darin, daß auch die Sonne rechtsläufig (d.h. in Richtung Osten) auf der Himmelskugel entlang wandert und zwar um rund 1° pro Tag. In einem siderischen Monat sind das rund $1^\circ \times 27.3$ Tage, also rund 27.3° . Um diesen zusätzlichen Bogen zu durchlaufen, benötigt der Mond etwas mehr als zwei Tage. Der zeitliche Abstand zwischen zwei gleichen Mondphasen ist deshalb 29 Tage, 12 Stunden, 44 Minuten und 2.8 Sekunden ($=29.53059$ Tage). Dieser Zeitraum wird als Luration oder synodischer Monat bezeichnet.

Da die Mondbahn einen Großkreis bildet, der um ca. 5° (genau $5^\circ 8'43''$) gegen die Ekliptik geneigt ist, schneidet er die Ekliptik an zwei Punkten, die als Knoten bezeichnet werden. Schneidet der Mond von der Südhalbkugel kommend die Ekliptik, dann ist dieser Schnittpunkt der „aufsteigende Knoten“. Andernfalls wird er „absteigender Knoten“ genannt. Aufgrund der Sonnenanziehung dreht sich die Bahnebene des Mondes um die Erde, was zu einer Wanderung der Knotenpunkte um ca. 19° pro Jahr auf der Ekliptik führt und zwar entgegengesetzt der wahren Mondbewegung, also von Ost nach West. Der komplette Umlauf der Knotenlinie (das ist die Verbindungslinie zwischen dem aufsteigenden und den absteigenden Knoten) benötigt genau 18.5997 Jahre. Da die Erdbahn selbst um 23.4406° gegenüber der Ekliptik geneigt ist, schwankt die Neigung der Mondbahn in Bezug auf die Äquatorebene der Erde ebenfalls mit dieser Periode. Das erklärt, warum in manchen Jahren der Vollmond immer tief am Himmel steht und einige Jahr später wesentlich höher. Den Zeitraum, der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotendurchgängen vergeht, nennt man einen drakonitischen Monat (27d 5h 35.8s).

Da die Mondbahn um die Erde eine Ellipse ist, gibt es noch zwei weitere ausgezeichnete Punkte: als Perigäum bezeichnet man den Punkt der Bahn, in dem der Mond der Erde am nächsten ist, als Apogäum den erdfernten Punkt. Die Linie, welche diese beiden Punkte verbindet, bezeichnet man als Apsidenlinie. Auch diese Apsidenlinie wandert ähnlich wie die Knotenlinie im Laufe der Zeit einmal um die Mondbahn und zwar in genau 8.8503 Jahren. Während dieser Zeit ändert sich der Winkel zwischen dem Frühlingspunkt und dem Perigäumspunkt am Himmel von 0° bis 360° . Der

Winkelabstand zwischen Perigäum und Frühlingspunkt wird oft als Länge des Perigäums bezeichnet. Diese Wanderung des Perigäums ist auch der Grund, warum die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perigäumsdurchgängen (anomalistischer Monat) ein klein wenig länger ist als ein siderischer Monat.

Aus dem zweiten Keplerischen Gesetz ist bekannt, daß sich der Mond im Perigäum schneller bewegen muß als im Apogäum. Diese bereits von CLAUDIUS PTOLEMÄUS um 150 v.u.Z. entdeckte Erscheinung führt zu einer ungleichförmigen Geschwindigkeit des Mondes auf seiner Bahn an der Himmelskugel. In Gradmaß ausgedrückt beträgt diese „Große Ungleichheit“ $\pm 6^{\circ}17.3'$. Sie drückt die maximale Positionsabweichung gegenüber dem „mittleren Mond“ aus, der sich mit gleichmäßiger „mittlerer“ Geschwindigkeit bewegt. Diese „Ungleichheit“ wird durch weitere periodische Schwankungen überlagert, von denen die Evektion die Größte ist. Sie läßt die Mondposition um den mittleren Mondort mit einer Periode von 32 Tagen um $\pm 1^{\circ}16'$ schwanken und wird durch Störungen von Sonne und Planeten verursacht.

Eine weitere, erst 1590 von TYCHO BRAHE (1546-1601) entdeckte Störung mit einer Periode von einem halben synodischen Monat und einer Amplitude in Länge von 39.5° bezeichnet man als Variation. Sie ergibt sich aus einer Beschleunigung der Mondbewegung in den Apsiden und in einer nachfolgenden Verlangsamung im ersten und letzten Viertel.

Kaum bekannt und mit einer Amplitude von $11.2'$ auch nicht besonders groß ist die „jährliche Ungleichheit“. Wenn sich am Anfang des Jahres die Erde mit dem Mond ihrem sonnennächsten Punkt nähert (Perihel), dann „verlängert“ die stärkere Sonnenanziehung die Mondbahn in Richtung Sonne. Der entgegengesetzte Effekt tritt im Herbst auf, wenn die Erde mit dem Mond durch ihr Aphel geht und sich somit die Gravitation der Erde auf den Mond stärker auswirkt.

Neben diesen erwähnten periodischen Schwankungen gibt es weitere mit relativ kleinen Amplituden. Erwähnenswert ist wegen ihrer interessanten Ursache noch die „lunare Ungleichheit“. Ihre Ursache liegt darin, daß sich genaugenommen der Mond nicht um den Erdmittelpunkt dreht, sondern vielmehr um den gemeinsamen Schwerpunkt (Baryzentrum) des Erde-Mond-Systems. Zwar liegt dieser Punkt noch im Erdinneren. Trotzdem führt diese kleine „Taubelbewegung“ zu einem meßbaren Effekt mit einer Periode von genau einem siderischen Monat.

Änderungen in der Mondbewegung, die nicht periodisch, sondern fortschreitend sind, bezeichnet man als säkular. So verliert die Erde aufgrund der Gezeitenreibung im Laufe der Zeit an Drehimpuls, der aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes zu einer Vergrößerung des Bahndrehimpulses des Mondes führt: Der Mond entfernt sich deshalb jedes Jahr um knapp 4 Zentimeter von der Erde. Das ist nur ein Effekt von vielen, der in 100 Jahren zu einer Abweichung von rund $24''$ von der von der Mondtheorie geforderten Position führt. Trotz der Kleinheit wurde dieser Effekt der säkularen Akzeleration bereits Anfang des 18. Jahrhunderts von EDMUND HALLEY (1656-1742) entdeckt.

Die genaue Berechnung der Mondbahn ist aufgrund des in kosmischen Maßstäben sehr geringen Abstandes von Erde und Mond ein sehr schwieriges Problem. Deshalb ist es notwendig, die Position des Mondes regelmäßig möglichst genau zu bestimmen. Dafür bieten sich Sternbedeckungen an, da die Koordinaten aller dafür in Frage kommenden Sterne sehr genau bekannt sind. Die Beobachtung reduziert sich dabei auf eine möglichst genaue Bestimmung des Zeitpunktes, wann ein Stern am

östlichen Mondrand verschwindet bzw. wenn er wieder am westlichen Rand auftaucht. Amateurastronomen erreichen dabei Genauigkeiten in der Größenordnung von einem Zehntel Sekunde. Professionelle Beobachter arbeiten in der Regel mit photoelektrischen Methoden, mit denen sich sogar das Beugungsmuster eines hinter dem Mondrand verschwindenden Sterns messen läßt. Dieses Beugungsmuster enthält u.U. Informationen, aus dem man den scheinbaren Winkeldurchmesser des Sterns, der gerade vom Mond bedeckt wird, bestimmen kann.

Die gemessenen Zeitpunkte werden gemeinsam mit den ebenfalls genauen Koordinaten des Beobachtungsortes z.B. an das „*International Lunar Occultation Centre (ILOC)*“ in Tokio oder an die „*International Occultation Timing Association/European Section (IOTA/ES)*“ in Hannover weitergeleitet. Dort bestimmt man aus diesen Daten die genaue Mondposition und vergleicht sie mit dem berechneten Mondort. Außerdem dienen die Beobachtungen der Verbesserung der Genauigkeit des Geländeprofiles der Rand-Region des Mondes.

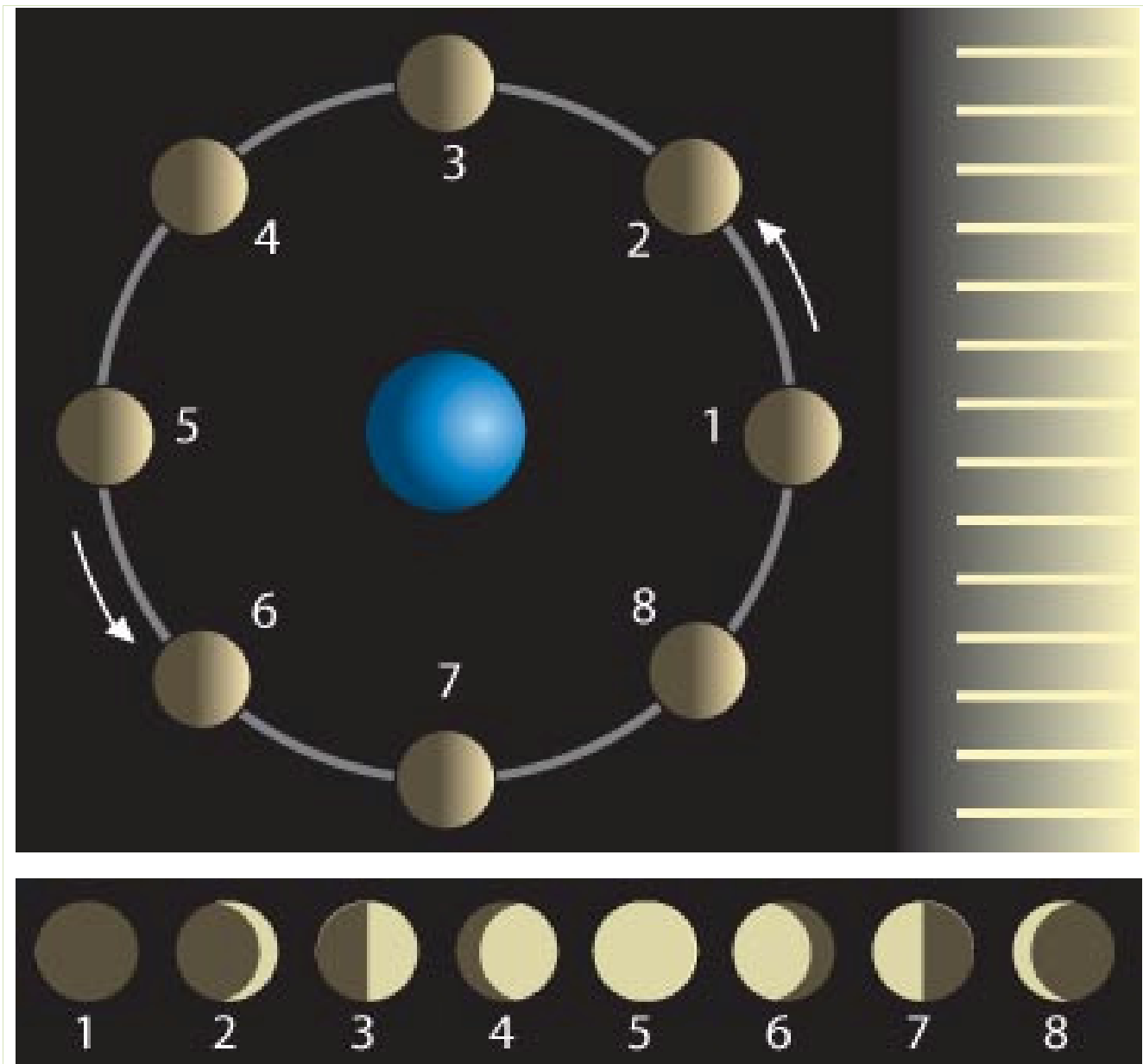
Sonderfälle sind streifende Sternbedeckungen: Der Stern kratzt dabei am südlichen oder nördlichen Horn des Mondes entlang. Ein Beobachter sieht so den Stern immer wieder mal verschwinden und danach wieder kurz aufblinken. Manchmal kann man bei einem solchen Ereignis bis zu zehn und mehr solcher Kontakte hintereinander beobachten.

Die Entfernung des Mondes von der Erde läßt sich seit den Apollo-Missionen über Laser-Laufzeitmessungen bis auf wenige Zentimeter genau bestimmen.

Mondphasen

Unter den Mondphasen versteht man das wechselnde Aussehen des Mondes im Laufe eines Monats. Dieser Phasenwechsel äußert sich in der Wanderung der Grenze zwischen beleuchteter und unbeleuchteter Mondhälfte (dem sog. Terminator) über die sichtbare Mondscheibe. Schon eine flüchtige Beobachtung dieses Phasenwechsels offenbart, daß er etwas mit dem Winkelabstand des Mondes zur Sonne zu tun hat: Bei Neumond steht der Mond gerade zwischen Sonne und Erde. Er geht in etwa mit der Sonne auf und in etwa mit der Sonne unter. Ein paar Tage später ist er als schmale Sichel kurz nach Sonnenuntergang am Westhorizont zu sehen. In dem Augenblick, in dem der Winkelabstand von Sonne zu Mond 90° erreicht, ist „erstes Viertel“ oder zunehmender Halbmond. Der Mond steht bei Sonnenuntergang ungefähr im Süden. Danach wird die Mondscheibe immer „voller“ um bei einem Winkel von 180° zur Sonne als „Vollmond“ zu erscheinen: Der Vollmond geht ungefähr zum gleichen Zeitpunkt im Osten auf wenn die Sonne im Westen untergeht. Anschließend dreht sich das Szenario um, der Mond wird „abnehmend“, erreicht das „letzte Viertel“ bei einem Phasenwinkel von 270° und erscheint kurz vor Neumond wiederum als schmale Sichel, nur diesmal morgens kurz vor Sonnenaufgang über dem Osthorizont.

Bestimmt man den genauen Winkel zwischen Sonne und Mond zum Zeitpunkt des Halbmondes (der Terminator ist in diesem Fall genau eine Gerade), dann erkennt man, daß er nicht ganz 90° , sondern nur $89^\circ 50'$ beträgt. Der Grund liegt in der endlichen Entfernung der Sonne. Dieser Sachverhalt wurde bereits vor mehr als 2200 Jahren von ARISTARCH VON SAMOS (um 320 bis 250 v.Chr.) ausgenutzt, um die Entfernung der Erde von der Sonne abzuschätzen. Er ging von einem Winkel von 87° aus und folgerte daraus, daß die Sonne 19-mal weiter entfernt ist als der Mond.

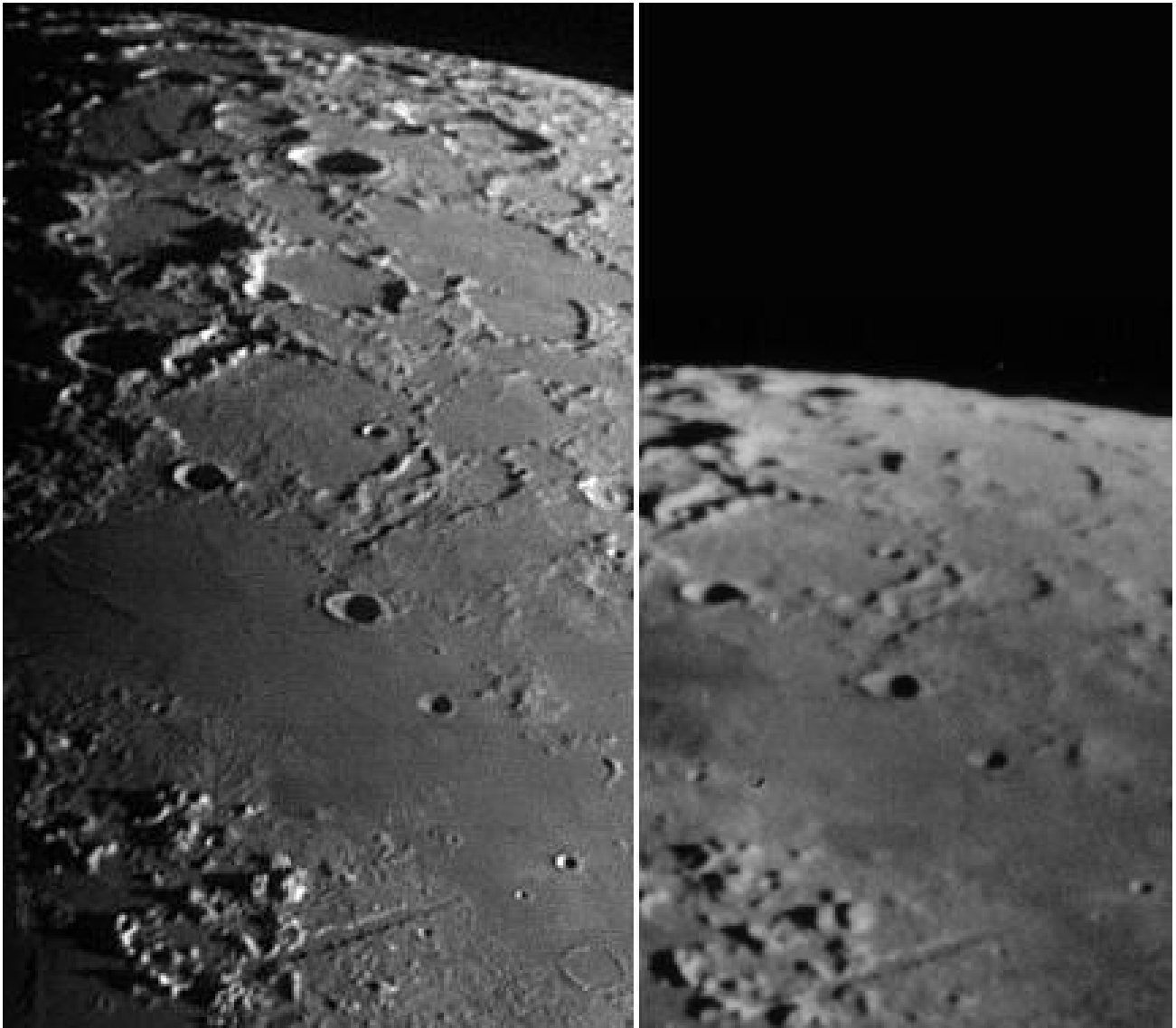


Entstehung der Mondphasen: 1 Neumond, 3 Erstes Viertel, 5 Vollmond, 7 Letztes Viertel

Libration

Es ist nicht ganz richtig, daß man von der Erde aus nur genau eine Hälfte (50%) des Mondes sehen kann. In Wirklichkeit kann man im Laufe der Zeit 59% der Mondoberfläche beobachten. Grund dafür ist eine Taumelbewegung des Mondes auf seiner Bahn, die als Libration bezeichnet wird. Die Libration setzt sich aus vier Anteilen zusammen, von denen die Libration in Länge und die größten Anteile liefern. Die Ursache für die Libration in Länge liegt in der Ellipsenform der Mondbahn. Daraus resultieren nach dem zweiten Keplerschen Gesetz unterschiedliche Bahngeschwindigkeiten im Bereich des Perigäums und im Bereich des Apogäums. Die Geschwindigkeit der gebundenen Rotation des Mondes ist im Gegensatz dazu konstant. Oder anders ausgedrückt: Die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung des Mondes um die Erde ändert sich periodisch, die Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation des Mondes dagegen nicht. Da gebundene Rotation

vorliegt, müssen beide Winkelgeschwindigkeiten jedoch im Mittel gleich sein. Das führt dazu, daß der Mond manchmal ein klein wenig in selenographischer Länge gedreht erscheint und zwar um maximal 7.9° . Man kann also u.U. etwas über den Westrand und manchmal etwas über den Ostrand des Mondes hinaussehen. Die „Mondrückseite“ ist damit für einen Beobachter auf der Erde doch nicht vollständig unsichtbar



Diese beiden Aufnahmen im nördlichen Polbereich des Mondes zeigen sehr schön die Auswirkungen der Libration. Man beachte auch das sogenannte „Alpenquertal“ im unteren Teil des Bildes

Die Libration in Breite hat eine andere Ursache. Sie beruht darauf, daß die Rotationsachse des Mondes nicht senkrecht auf seiner Bahnebene steht. Die Neigung beträgt ungefähr 6.7° , d.h. der Mond-Nordpol und der Mond-Südpol kann je nach Lage der momentanen Rotationsachse in bezug zur Erde etwas über den Nord- oder Südrand hinausragen.

Ein weiterer Librationsanteil ergibt sich z.B. auch durch die Rotation der Erde selbst. Sie bewirkt, daß ein Beobachter den Mond zu unterschiedlichen Zeiten aufgrund der daraus resultierenden

parallaktischen Verschiebung in leicht unterschiedlichen Blickrichtungen sieht. Dieser Anteil wird deshalb auch als „tägliche Libration“ bezeichnet. Die „physische Libration“ ist dagegen kaum meßbar. Betrachtet man den Mond genauer, dann erkennt man, daß er nicht exakt einer Kugel gleicht. Sein Durchmesser in Erdrichtung ist etwas größer als der Durchmesser senkrecht dazu. Auf diese Weise entsteht ein Masseüberschuß in Richtung Erde, welcher letztendlich den Angriffspunkt bildet, über den das Gravitationsfeld der Erde die gebundene Rotation des Mondes erzwingt. Aufgrund der Ellipsenbahn bewegt sich - wie bereits bei der Diskussion der Libration in Länge erläutert - der Mond mit ungleichförmiger Geschwindigkeit um die Erde was dazu führt, daß die längere, den Massenüberschuß kennzeichnende Mondachse auch nicht immer genau zum Baryzentrum des Erde-Mond-Systems zeigt, sondern vielmehr um diese Richtung leicht pendelt. Die Amplitude dieser Pendelbewegung beträgt von der Erde aus gesehen ungefähr $0.54''$. Trotz der Kleinheit des Effekts muß er z.B. bei der Entfernungsmessung des Mondes mit Hilfe der Apollo-Laserreflektoren berücksichtigt werden, um genaue Werte zu erhalten.

Der Doppelplanet Erde-Mond ist vom Standpunkt der Himmelsmechanik aus ein sehr komplexes System, dessen exakte Behandlung einen außergewöhnlich hohen Aufwand erfordert. Das liegt nicht nur daran, daß ein Dreikörperproblem (hier Sonne-Erde-Mond) nur unter ganz speziellen, in der Natur nur schwer erfüllbaren Bedingungen (Librationsbahnen), lösbar ist, sondern hauptsächlich an den Störungen, die Sonne und Planeten verursachen. Ihre Berücksichtigung resultiert in einer aufwendigen Reihenentwicklung von Störungstermen, die in der Größenordnung von mehreren Hundert liegt.

Gezeiten

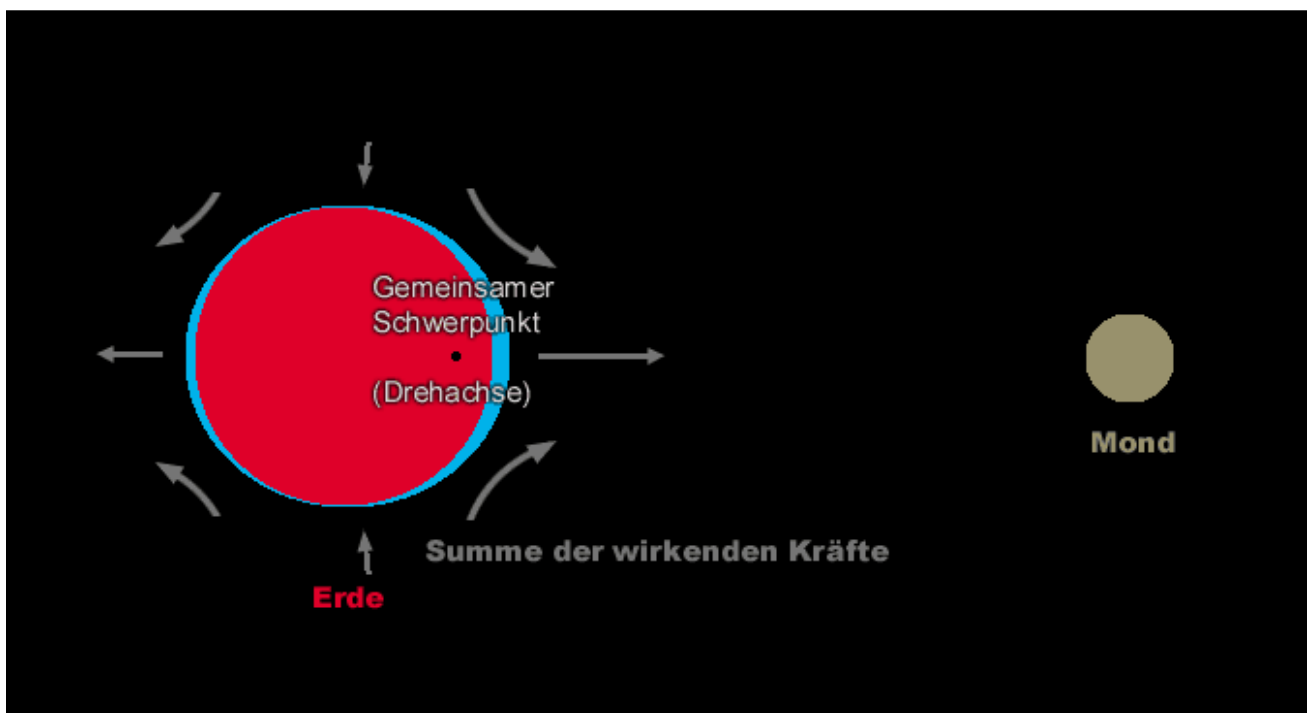
Die auffälligste „Störung“ im Erde-Mond-Sonne-System offenbart sich ohne Zweifel in den Gezeiten. Es ist falsch zu glauben, die Gezeiten würden sich nur auf die Wassermassen der Erde auswirken. Sie sind hier nur am besten sichtbar. Auch das Festland ist davon betroffen. Gezeitenwirkungen auf das Festland lassen sich jedoch aufgrund der Starrheit der Erdkruste schwerer nachweisen. Sie führen lediglich zu einer Deformierung von $\pm 25 \text{ cm}$ in Richtung des Mondes mit einer Periode von ungefähr 12 Stunden. Ein weiteres Vorurteil ist, daß die Gezeiten ausschließlich durch den Mond verursacht werden. Betrachtet man die Gezeiten als „Störung“ des Systems „Starrer Erdkörper / Wassermassen“, dann lassen sich über den Störfaktor

$$\sigma = \frac{m_s}{M_E + M_W} \left(\frac{a}{d} \right)^3 \quad [1.3]$$

die einzelnen Anteile grob abschätzen. $M_E + M_W$ ist die Summe aus der Gesteins- und der Wassermasse der Erde, m_s die Störmasse und d deren Abstand zur Erde. Die Größe a gibt in etwa den Abstand der Wassermassen zum Erdmittelpunkt an und kann in dieser Näherung gleich dem Erdradius gesetzt werden.

Um das Phänomen Gezeiten zu verstehen, muß man die unterschiedlichen Kräfte an der mondzugewandten- und mondabgewandten Erdseite betrachten. Da die Gravitationskraft mit dem

Quadrat der Entfernung abnimmt, kann man für diese beiden Punkte eine unterschiedlich starke Gravitationsanziehung erwarten. Oder anders ausgedrückt, der Mond – und um etwa die Hälfte schwächer die Sonne – modifizieren die Erdbeschleunigung g auf eine bestimmte periodische Art und Weise. Der Betrag der Erdbeschleunigung g an einem bestimmten Ort auf der Erde wird im wesentlichen durch folgende Anteile bestimmt: Einmal durch den Anteil, den die Gravitationsanziehung der Erde bewirkt und durch die Erdmasse gegeben ist, zum Zweiten aus dem Anteil, der aus der Rotation der Erde um ihre Achse folgt und Drittens durch den Anteil, der aus der Rotation der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt S des Erde-Mond-Systems resultiert. Dieser Punkt S befindet sich rund 4700 km vom Erdmittelpunkt entfernt im Inneren der Erde. In erster Näherung soll von der Eigenrotation der Erde abgesehen werden. Auch der Einfluß der Sonne auf die Gezeiten wird vorerst vernachlässigt. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf ein ruhendes Koordinatensystem, dessen Nullpunkt mit dem Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems zusammenfällt. Das hat den Vorteil, daß sich in einem derartigen (baryzentrischen) Koordinatensystem jeder Punkt bis auf eine konstante Verschiebung genauso bewegt wie der Ursprung. Oder anders ausgedrückt, Erde und Mond bewegen sich mit genau gleicher Winkelgeschwindigkeit um diesen Punkt. Der Erdmittelpunkt bewegt sich demnach innerhalb eines siderischen Monats auf einem Kreis mit dem Radius $R \approx \frac{3}{4} R_E$ um S, was für jeden Punkt der Erde zu einer Zentrifugalbeschleunigung g_z führt, die parallel zur Verbindungslinie Erde-Mond gerichtet ist und vom Mond weg zeigt. A soll der Punkt auf der Erde sein, bei dem der Mond im Zenit und B der Punkt, bei dem der Mond im Nadir steht. Da B weiter vom Mond entfernt ist als A (genau um $2R_{Erde}$), wirkt hier eine geringere Mondanziehungskraft. Am Punkt B überwiegt dagegen die Zentrifugalkraft, während sich im Erdmittelpunkt die Gravitations- und Zentrifugalkraft gerade aufheben.



Entstehung der Gezeiten

Die Verringerung der Erdbeschleunigung an den Punkten A (durch die stärkere Mondanziehung) und B (durch die stärkere Zentrifugalkraft) bewirkt, daß sich dort Flutberge ausbilden. Da sich nun die Erde aufgrund ihrer Eigenrotation innerhalb eines Tages darunter wegbewegt, kommt es ungefähr alle 12,4 Stunden zu einem Hochwasser (Flut).

$$\frac{1}{2} t_t = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{t_{Erde}} - \frac{2\pi}{t_{Mond}}} = \frac{t_{Mond} t_{Erde}}{2(t_{Mond} - t_{Erde})} = 12 \text{ h } 26 \text{ min}$$

[1.4]

wobei jeweils die siderischen Perioden einzusetzen sind,

Im folgendem soll ein stark vereinfachtes quantitatives Modell für die durch den Mond verursachten Gezeiten entwickelt werden. Die Erde wird dazu als kugelförmig und gleichmäßig mit Wasser bedeckt vorausgesetzt. Aufgabe ist es zu berechnen, wie sich die radiale Komponente g_R der Erdbeschleunigung g unter dem Einfluß der (monatlichen) Bewegung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems und unter dem Einfluß der Bewegung des Mondes um die Erde verhält.

Für jedes Masselement m der Erde muß die Zentrifugalbeschleunigung g_z die Gravitationsbeschleunigung a_{Mond} des Mondes ausgleichen. Ist r_{EM} die Entfernung des Mondes vom Masselement m der Erde und M die Mondmasse, dann gilt für die vom Mond auf das Masselement m ausgeübte Kraft

$$F_M = G \frac{m M_{Mond}}{r_{EM}^2} \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}, \text{ Newtonsche Gravitationskonstante} \quad [1.5]$$

Die Zentrifugalkraft hängt dagegen von der Winkelgeschwindigkeit ω ab, mit der sich die Masse m um den gemeinsamen Schwerpunkt S des Erde-Mond-Systems bewegt:

$$F_Z = m r_s \omega^2 \quad [1.6]$$

wobei r_s der Abstand der Masse m von S ist.

Die Entfernung d des Schwerpunktes S vom Mittelpunkt der Erde aus kann aus folgender Gleichgewichtsbedingung berechnet werden:

$$M_{Erde} d = M_{Mond} (r_{EM} - d) \quad [1.7]$$

also

$$d = \frac{M_{Mond} r_{EM}}{M_{Erde} + M_{Mond}} = 4671 \text{ km} \quad (\text{bei mittlerer Mondentfernung}) \quad [1.8]$$

Ist α der Winkel unter dem die Masse m vom Erdmittelpunkt P aus in bezug auf die Richtung zum Mond erscheint, dann gilt unter Ausnutzung des Kosinussatzes für die radiale Komponente der Mondanziehungskraft auf die Masse m :

$$F_{Gr} = \frac{G m M_{Mond} \cos \alpha}{r_{EM}^2 + R_{Erde}^2 - 2 R_{Erde} r_{EM} \cos \alpha} \quad [1.9]$$

Entwickelt man diese Beziehung in eine Reihe und berücksichtigt nur die ersten beiden Glieder, dann erhält man folgenden Näherungsausdruck:

$$F_{Gr} \approx \frac{G m M_{Mond} \cos \alpha}{r_{EM}^2} + \frac{2 G m M_{Mond} R_{Erde} \cos^2 \alpha}{r_{EM}^3} = \frac{G m M_{Mond} \cos \alpha}{r_{EM}^2} \left(1 + \frac{2 R_{Erde} \cos \alpha}{r_{EM}} \right) \quad [1.10]$$

Für die radiale Komponente der Zentrifugalkraft F_Z , die auf die Masse m wirkt, gilt

$$F_{Zr} = m (R_{Erde} - d \cos \alpha) \omega^2 \quad [1.11]$$

Die Gravitationsanziehung durch den Mond und die Zentrifugalkraft F_{Zr} müssen immer im Gleichgewicht sein, also

$$M_{Mond} (r_{EM} - d) \omega^2 = \frac{G M_{Mond} M_{Erde}}{r_{EM}^2} \quad [1.12]$$

Berechnet man hieraus ω^2 , dann erhält man aus (1.11)

$$m (R_{Erde} - d \cos \alpha) \omega^2 = \frac{G m}{r_{EM}^3} ((M_{Erde} + M_{Mond}) R_{Erde} - M_{Mond} r_{EM} \cos \alpha) \quad [1.13]$$

Damit sind die durch die (monatliche) Rotation der Erde um den Schwerpunkt S und die durch den Mond verursachten Radialkräfte bekannt. Um die Gesamtkraft, die auf m in radialer Richtung wirkt, auszurechnen, fehlen noch die Gravitationskraft F_{GE} der Erde, die auf m wirkt und die durch die tägliche Rotation verursachte Zentrifugalkraft F_{Zd} :

$$F_{GE} = - \frac{G m M_{Erde}}{R_{Erde}^2} \quad [1.14]$$

$$F_{Zd} = m R_{Erde} \Omega^2 \quad [1.15]$$

Die Gesamtkraft ist demnach

$$F_R = - \frac{G m M_{Erde}}{R_{Erde}^2} + m R_{Erde} \Omega^2 + \frac{G m M_{Mond} \cos \alpha}{r_{EM}^2} \left(1 + \frac{2 R_{Erde} \cos \alpha}{r_{EM}} \right) + \frac{G m}{r_{EM}^3} ((M_{Erde} + M_{Mond}) R_{Erde} - M_{Mond} r_{EM} \cos \alpha) \quad [1.16]$$

und nach Vereinfachung

$$F_R = m R_{Erde} \Omega^2 - \frac{G m M_{Erde}}{R_{Erde}^2} + \frac{2 G m M_{Mond} R_{Erde} \cos^2 \alpha}{r_{EM}^3} + \frac{G m R_{Erde} (M_{Erde} + M_{Mond})}{r_{EM}^3} \quad [1.17]$$

Wie man sieht, bleibt nur noch ein winkelabhängiges Glied übrig, welches zur Achse, die durch den Erdmittelpunkt geht und senkrecht auf der Verbindungslinie Erde-Mond steht, symmetrisch ist. Teilt man (1.17) durch m , dann erhält man die einzelnen Beschleunigungsanteile mit dem Ergebnis: die gezeitenerzeugenden Terme sind ungefähr zehn Millionen Mal kleiner als die Erdbeschleunigung g_E .

$$g_R = g_\Omega - g_E + g_M + g_Z \quad [1.18]$$

Aus (1.9) und (1.11) folgt, daß auf der mondzugewandten Seite (Punkt A) die Gravitationskraft F_{Gr} größer als die Zentrifugalkraft F_{Zr} ist, was dazu führt, daß die resultierende Kraft die Wassermassen (und, wenn auch in wesentlich kleineren Dimensionen die Erdkruste) in Richtung des Mondes zieht wodurch ein Tidenhub – ein sogenannter Flutberg – initiiert wird. Genau umgekehrt verhält es sich auf der mondagewandten Seite (Punkt B): Die Gravitationskraft F_{Gr} ist kleiner als die Zentrifugalkraft F_{Zr} . Die Resultierende zieht die Wassermassen vom Erdmittelpunkt weg, wobei sich als Reaktion darauf ein zweiter Tidenhub ausbildet. Von den anderen Gebieten fließt das Wasser (aufgrund der „schiebenden“ Wirkung der Horizontalkomponente der Gezeitenkräfte) zu diesen Flutbergen, so daß sich zwischen ihnen Niedrigwassergebiete bilden. So entsteht Niedrigwasser. Die dabei auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten können dabei sehr beträchtlich werden. Sie erreichen an der Oberfläche der Ozeane bis zu 15 km/s.

Die gleichen Kräfte wirken natürlich auch auf die feste Erdkruste. Allerdings wirken sie aufgrund der Erdrotation nicht lange genug auf den einzelnen Punkt. Deshalb kann sich der Erdkörper nicht wesentlich verformen. Auch auf dem Mond verursacht die Erde infolge der dort auftretenden Gezeitenkräfte zwei Flutberge, die den Mond umlaufen würden, wenn er keine gebundene Rotation hätte. Diese Flutberge sind jedoch manifest, d.h. der Mond ist nicht exakt kugelförmig sondern eher oblat mit der großen Achse in Richtung Erde. Der Mond besaß, nachdem er sich gebildet hatte, noch keine gebundene Rotation. Die auf ihn wirkenden Gezeitenkräfte entzogen ihm jedoch im Laufe der Zeit Drehimpuls, so daß er heute nur noch eine Seite der Erde zuwendet. Auch auf die Erde wirkt dieser Effekt, der als Gezeitenreibung bezeichnet wird und im Laufe der Zeit zu einer Vergrößerung der Tageslänge führt (ca. 0.0021 s /Jahrhundert). Im gleichen Maße übernimmt der Mond den Drehimpuls. Er entfernt sich langsam von der Erde.

Um den Tidenhub abzuschätzen muß die Arbeit berechnet werden, welche die Gezeitenkräfte leisten müssen, um die Masse m um die Höhe h anzuheben. Diese Arbeit ist $m g h$. Die Arbeit ergibt sich aus (1.17) zu (Mond):

$$W_T = \int_0^{R_E} \frac{2 G m M_{Mond} R_{Erde} \cos^2 \alpha}{r_{EM}^3} dR_{Erde} \quad [1.19]$$

Diese Kräfte sind in der Lage das Wasser der Ozeane um ungefähr

$$h = \frac{M_{\text{Mond}} R_{\text{Erde}}^4 \cos^2 \alpha}{M_{\text{Erde}} r_{\text{EM}}^3} \quad [1.20]$$

anzuheben. Setzt man Zahlenwerte ein, dann ergibt sich z.B. für den Punkt A ($\alpha = 0$):

$$h = 0.36 \text{ m}$$

Der Einfluß der Sonne ist etwa halb so groß ($h=0.16 \text{ m}$). Beide addieren sich zu einem Maximalwert, wenn Erde, Mond und Sonne in einer Linie stehen (Springflut). Wenn sie andererseits einen rechten Winkel bilden (bei „Halbmond“), gleichen sich die Gravitationswirkungen von Sonne und Mond in etwa aus, wodurch die Nippfluten entstehen. An den Küsten der Erde beobachtet man i. A. einen bedeutend größeren Tidenhub als mit (1.17) berechnet. So kann bei St. Malo (Frankreich), wenn das Wasser (ca. 17000 bis 18000 m^3/s) in die Mündung der Rance eindringt, ein Tidenhub von immerhin 13.5 Metern entstehen. Das zeigt, daß hier besprochene Modell näherungsweise nur in der Mitte der Ozeane, weitab von Landmassen, gelten kann. Das viel auffälligere Heben und Sinken des Meeresspiegels an den Küsten entsteht dadurch, daß sich im Bereich des Kontinentalschelfs, also in Küstennähe sich das Wasser ansammelt, während der Flutberg vorbeiwandert. So treten z.B. in Flußmündungen (wie z.B. bei St. Malo), die sich landeinwärts verengen, sehr viel höhere Tidenhübe auf, weil die Wassermassen vom Meer wie in einen Trichter hineingedrückt werden. Diesen Effekt kann man z.B. in Gezeitenkraftwerken zur Energiegewinnung ausnutzen.

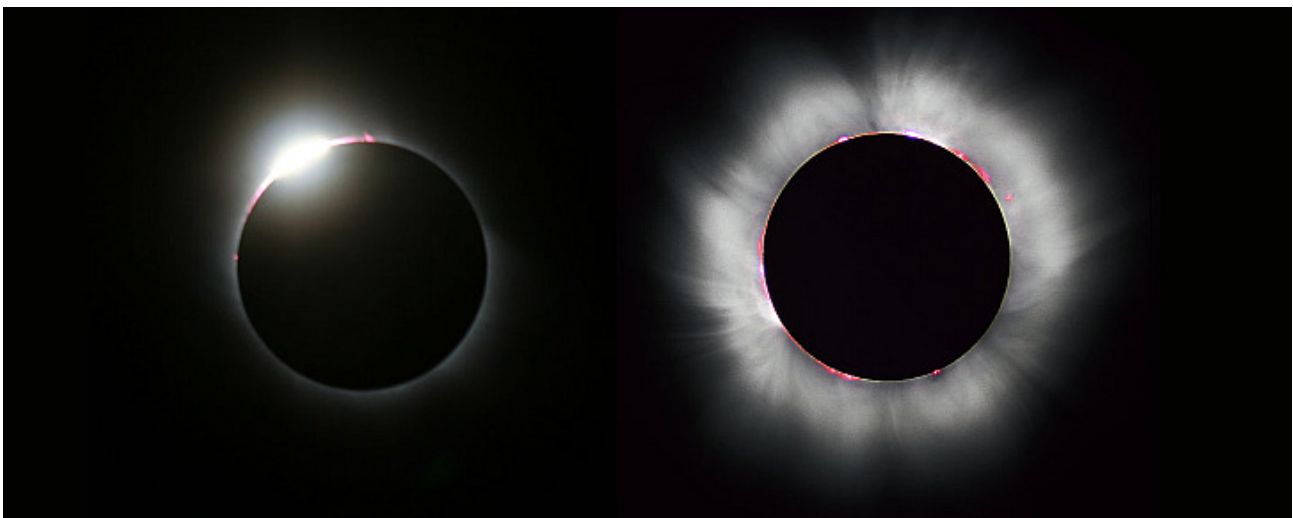
In der Realität hängt die Phänomenologie der Gezeiten für einen bestimmten Küstenort nicht nur von der wechselnden Position von Mond und Sonne am Himmel ab. Sie liefern quasi im Zusammenspiel mit der Erde nur den Antriebsmotor. Viel wichtiger für die lokale Ausprägung der Gezeiten und ihrer Dynamik sind die unregelmäßige Struktur der Ozeanbecken, ihre wechselnde Tiefe und die Struktur des Kontinentalschelfs in Küstennähe. Aus diesem Grund ist eine exakte Vorausberechnung von Ebbe und Flut und – wichtiger – des Tidenhubs und der Strömungsverhältnisse – ein außerordentlich schwieriges Problem. Insbesondere auch deshalb, weil sich in den Ozeanen großräumige Gezeitenschwingungen ausbilden, die sich nur sehr schwer modellieren lassen. So werden die Gezeiten der Nordsee fast ausschließlich durch das Mitschwingen mit dem Atlantik und nur untergeordnet durch die gezeitenbildenden Kräfte verursacht. Damit ist auch verständlich, daß die Gezeitenvorhersage für einen bestimmten Küstenort hauptsächlich aus empirischen Beobachtungen über längere Zeiträume hinweg abgeleitet wird.

Sonnen- und Mondfinsternisse

Dadurch, daß der Mond bei seiner Bewegung um die Erde zweimal im Monat die Ekliptik schneidet und sich dieser Schnittpunkt (Knoten) langsam entlang der Ekliptik bewegt (ein voller Umlauf in 18.5997 Jahre, während die Sonne dazu nur ein Jahr benötigt) kommt es vor, daß der Mondknoten manchmal ungefähr mit der Position der Sonne in der Ekliptik bzw. mit ihrem Gegenpunkt zusammenfällt. Befindet sich dann noch der Mond in der gleichen Position, dann tritt entweder eine Sonnenfinsternis (Neumond zwischen Erde und Sonne) oder eine Mondfinsternis (Vollmond im Erdschatten) auf.

Sonnenfinsternis

Es ist eine erstaunliche Laune der Natur, daß der scheinbare Durchmesser des Mondes fast exakt mit dem scheinbaren Durchmesser der Sonnenscheibe übereinstimmt (ungefähr ein halbes Grad). Dieser Zufall beschert uns eines der beeindruckendsten Naturschauspiele, die man sich vorstellen kann: eine totale Sonnenfinsternis. Nicht jedem ist es in seinem Leben vergönnt, solch ein Ereignis „live“ zu erleben. Die letzte totale Sonnenfinsternis, die von Deutschland aus beobachtet werden konnte, fand am 11. August 1999 statt. Trotzdem die Totalitätszone quer durch Süddeutschland verlief, konnte sie aufgrund der ungünstigen meteorologischen Verhältnisse in diesem Gebiet nicht überall gesehen werden. Aber nicht nur die Witterung ist für die relative Seltenheit einer totalen Sonnenfinsternis verantwortlich. Vielmehr ist es die Besonderheit der Mondbahn um die Erde, die nicht jeden Neumond zu einer Sonnenfinsternis werden läßt. Außerdem bewirkt die geringe Breite des Schattenkegels auf der Erde, daß das Ereignis für einen bestimmten Ort auf der Erde nur sehr selten eintritt (in Deutschland erst wieder 2081).

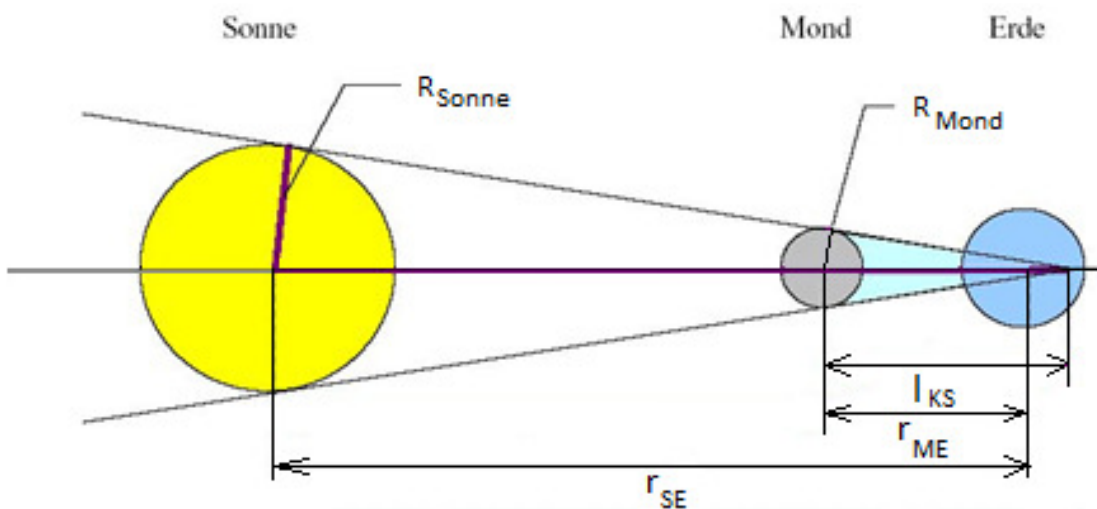


Totale Sonnenfinsternis: Perlringsphänomen und Sonnenkorona

Die älteste völlig gesicherte Beschreibung einer totalen Sonnenfinsternis wurde auf einer Tontafel entdeckt, die Archäologen 1948 in Ugarit (Syrien) aufgefunden haben. Sie fand am 5. März 1223 v.Chr. statt. Aber auch der Effekt der Gezeitenreibung konnte interessanterweise am Beispiel der Sonnenfinsternis vom Jahre 136 v.Chr. (genauer am 15. April 136 v.Chr. nach unserem heutigen Kalender) verifiziert werden, die in Babylon zu beobachten war, aber eigentlich 50 Längengrade

weiter westlich, auf Mallorca, hätte stattfinden sollen. Die Ursache für diese Diskrepanz liegt darin, daß die Rotationsdauer der Erde früher etwas kürzer war (wenn auch nur wenige Millisekunden). Seit dieser Sonnenfinsternis hat sich die Erde rund 781000-mal um ihre Achse gedreht und dabei doppelt so viele Gezeitenhübe ertragen. Der durch den Drehimpulsverlust resultierende Unterschied in der Tageslänge reicht dabei aus, die Sonnenfinsternis in Babylon stattfinden zu lassen und nicht in Mallorca, wie uns der Computer weismachen will, der den Effekt der Gezeitenreibung nicht kennt ...

Die Geometrie einer Sonnenfinsternis ist recht einfach. Dadurch, daß die Sonne eine ausgedehnte Lichtquelle ist, wirft der Mond einen konusförmigen, spitz zulaufenden Kernschatten und einen divergierenden Halbschatten in Richtung Erde.



Geometrie einer Sonnenfinsternis

Im Folgenden soll die Kernschattenlänge und die Breite der Zone auf der Erde, in der eine totale Sonnenfinsternis beobachtet werden kann, berechnet werden. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Mittelpunkte von Sonne, Mond und Erde genau auf einer Linie liegen. Astronomisch bedeutet diese Voraussetzung, daß der Mondbahnknoten genau mit der Position der Mitte der Sonnenscheibe zusammenfällt und das genau zu diesem Zeitpunkt Neumond ist. In diesem Fall gilt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{R_{\text{Sonne}}}{R_{\text{Mond}}} = \frac{(r_{\text{se}} - r_{\text{me}}) + l_{\text{ks}}}{l_{\text{ks}}}, \quad \text{mit der Kernschattenlänge } l_{\text{ks}} \quad [1.21]$$

also

$$l_{\text{ks}} = \frac{(r_{\text{se}} - r_{\text{me}}) R_{\text{Mond}}}{R_{\text{Sonne}} - R_{\text{Mond}}} \quad [1.22]$$

Wie die Ergebnisse der Aufgabe zeigen, erreicht der Mondschatten nicht immer die Oberfläche der Erde. In solch einem Fall spricht man im Gegensatz zu einer totalen Sonnenfinsternis von einer ringförmigen Sonnenfinsternis. Wenn er die Oberfläche der Erde erreicht, dann wandert der Kernschatten über die Erdoberfläche hinweg und es entsteht ein Streifen, von wo aus die Sonne

völlig von der Mondscheibe abgedeckt erscheint. Um die Breite dieser Kernschattenzone abzuschätzen, kann wieder der Strahlensatz verwendet werden. Von der Krümmung der Erdoberfläche wird abgesehen, da der Durchmesser des Kernschattenkegels d offensichtlich viel kleiner ist als der Erdradius R_E und die Totalität über dem Äquator stattfinden soll.

Es gilt dann:

$$d = \frac{2 R_{Mond} (l_{ks} - r_{em})}{l_{ks}} \quad [1.23]$$

Ein Beobachter, der sich innerhalb des Halbschattenkegels befindet, sieht eine sogenannte partielle Sonnenfinsternis. In diesem Fall deckt der Mond nur einen Teil der Sonnenscheibe ab. Da der Bereich des Halbschattenkegels, der die Erde bei einer Sonnenfinsternis überdeckt, viel größer ist als die vergleichsweise schmale Totalitätszone, treten für einen bestimmten Ort viel häufiger partielle Sonnenfinsternisse auf als totale. Anders sieht es aus, wenn man die gesamte Erde betrachtet. So gibt es z.B. zwischen 2000 v.Chr. bis 3000 n.Chr., also innerhalb von 5 Jahrtausenden, insgesamt 11897 Verfinsterungen der Sonne. Davon sind 4197 partiell, 3960 ringförmig und 3190 total. 550 sind sowohl ringförmig als auch total. Berechnet man die prozentuale Verteilung, so ergibt sich ein relativ ausgeglichenes Bild:

Partiell	35.5%	Total	26.8%
Ringförmig	33.3%	Ringförmig-total	4.6%

Um die Häufigkeit abzuschätzen, mit der Sonnenfinsternisse überhaupt auftreten, muß man noch einmal einen Blick auf die Bedingungen werfen, die für ihre Entstehung notwendig sind:

Die Position des Mondknotens und des Mondes selbst (Neumond!) müssen von einem Beobachter auf der Erdoberfläche aus gesehen mit der Position der Sonne am Himmel innerhalb eines gewissen Bereichs zusammenfallen

Bei der Entstehung von Sonnenfinsternissen spielen offensichtlich verschiedene Periodizitäten eine Rolle. Aus der Lösung der obigen Aufgabe folgt, daß es offensichtlich zwei Bereiche am Himmel mit einer Längenausdehnung von 33° gibt (mit jeweils einem Mondbahnknoten in der Mitte), die sich langsam und gleichmäßig in Richtung Sonne auf der Ekliptik entlang bewegen. Eine Sonnenfinsternis (meistens partiell) tritt dann ein, wenn die Sonnenscheibe in solch eine Zone eintritt und sich auch der Neumond darin befindet. Der Neumond muß sich also in Knotennähe aufhalten und zwar innerhalb eines Zeitraums, der als Finsterniszeit bezeichnet wird und zwar zwischen $18 \frac{3}{4}$ Tage vor und $18 \frac{3}{4}$ Tage nach Erreichen des Knotenpunktes.

Aufgrund der Bewegung der Erde um die Sonne wandert – geozentrisch gesehen, die Sonne in einem Jahr einmal um den Zodiakus. Da sich der Mondknoten rückläufig auf der Ekliptik bewegt (also der Sonne entgegen), ist die Zeitspanne zwischen zwei gleichen Mondknotendurchgängen (also zwischen aufsteigenden und aufsteigenden bzw. absteigenden und absteigenden) der Sonne kürzer als ein Jahr. Diese Zeitspanne wird als Finsternisjahr bezeichnet. Es dauert 346 Tage 14 Stunden 52 Minuten und 55 Sekunden.

Schon die babylonischen Priester-Astronomen wußten aus langjährigen Beobachtungen, daß sich Sonnen- und Mondfinsternisse alle 6585 Tage, das sind 18 Jahre und, je nach der Anzahl der darin enthaltenen Schaltjahre, 10 oder 11 Tage, wiederholen. Diesen Rhythmus nennt man Saroszyklus oder chaldäische Periode. Mit dieser Erkenntnis waren sie in der Lage, das Auftreten von Sonnen- und Mondfinsternissen vorauszuberechnen.

Sarosperiode

Der Name Sarosperiode wurde in der westlichen Welt erstmals von EDMUND HALLEY im Jahre 1691 verwendet, der ihn aus dem byzantinischen Lexikon Suda, das aus dem 10. Jahrhundert stammt, entnommen hatte.

- 242 drakonitische Monate = 6585,36 Tage
- 223 synodische Monate = 6585,32 Tage
- 239 anomalistische Monate = 6585,54 Tage
- 19 Finsternisjahre = 6585,78 Tage

Zufällig sind 19 Finsternisjahre, etwa 18 Jahre und 11 1/3 Tage, fast genauso lang wie 223 synodische Monate. Daher müssen sich ähnliche Finsternisbedingungen etwa alle 18 Jahre wiederholen. Ein weiterer Zufall ist, daß der anomalistische Monat (27.55455 Tage) mit 239 multipliziert 6585.5 Tage ergibt. Deshalb ist der Abstand von der Erde zum Mond, welcher darüber entscheidet, ob eine Sonnenfinsternis total oder ringförmig ist, ebenfalls fast genauso groß wie 19 Finsternisjahre. Eine Sonnenfinsternis wiederholt sich also etwa alle 6585.23 Tage. Die restlichen 0.32 Tage der 223 synodischen Monate bewirken, daß die Sonnenfinsternis nicht wieder am gleichen Ort der Erde stattfindet, sondern weiter westlich (ungefähr 120° Längengrade). Nach 18 Jahren und 11.33 Tagen wiederholen sich deshalb Finsternisse fast exakt.

Die sich nach 18 Jahren wiederholenden Finsternisse werden in Saroszyklen zusammengefaßt. Da die einzelnen Zyklen leicht unterschiedlich sind, wiederholen sich die Finsternisse im Saroszyklus nicht unbegrenzt. Zu einem vollständigen Saros gehören zwischen 68 und 77 Sonnenfinsternisse, die über einen Zeitraum von ca. 1200 Jahren verteilt sind. Er beginnt mit einer Reihe von partiellen Finsternissen in einem der Polgebiete. In diesem Fall verfehlt der Kernschatten noch die Erdoberfläche. Danach entwickelt sich eine Folge von totalen oder ringförmigen Finsternissen, die sich nach und nach zum entgegengesetzten Pol verlagern, wo schließlich die letzten Finsternisse des Saroszyklus - wieder als partielle - auftreten. Die einzelnen Saroszyklen werden durchnummeriert und zur Kennzeichnung von Sonnenfinsternissen verwendet. Die Finsternis vom 11. August 1999 gehörte zum Beispiel zum Saros-Zyklus Nr.145 (genauer, die 21. im Zyklus 145), bestehend aus 77 Ereignissen, die am 4. Januar 1639 begonnen haben und am 17. April 3009 enden.

Zwischen aufeinanderfolgenden Finsternissen eines bestimmten Saros gibt es viele andere, die zu anderen Zyklen gehören. Zurzeit gibt es 25 Zyklen, die zentrale (d.h. ringförmige oder totale) Finsternisse erzeugen. Daneben erzeugen 14 weiterer Zyklen nicht zentrale Finsternisse, die also nirgends auf der Erde als total oder ringförmig gesehen werden können.

Ein anderer Zyklus von Sonnen- und Mondfinsternissen stellt der weithin unbekannte Inexzyklus dar. Er beruht darauf, daß 358 synodische Monate ziemlich genau 388.5001 drakonitische Monate entsprechen. Jeder Zyklus umfaßt dabei ca. 750 Finsternisse (beginnend mit 140 partiellen Verfinsterungen dem ca. 500 Totale folgen bevor erneut 140 Partielle den Zyklus beschließen), die sich auf einen Zeitraum von rund 23000 Jahren verteilen.

Zufällig sind 19 Finsternisjahre, etwa 18 Jahre und 11 1/3 Tage, fast genauso lang wie 223 synodische Monate. Daher müssen sich ähnliche Finsternisbedingungen etwa alle 18 Jahre wiederholen. Ein weiterer Zufall ist, daß der anomalistische Monat (27.55455 Tage) mit 239 multipliziert 6585.5 Tage ergibt. Deshalb ist der Abstand von der Erde zum Mond, welcher darüber entscheidet, ob eine Sonnenfinsternis total oder ringförmig ist, ebenfalls fast genauso groß wie 19 Finsternisjahre. Eine Sonnenfinsternis wiederholt sich also etwa alle 6585.23 Tage. Die restlichen 0.32 Tage der 223 synodischen Monate bewirken, daß die Sonnenfinsternis nicht wieder am gleichen Ort der Erde stattfindet, sondern weiter westlich (ungefähr 120° Längengrade). Nach 18 Jahren und 11.33 Tagen wiederholen sich deshalb Finsternisse fast exakt.

Die sich nach 18 Jahren wiederholenden Finsternisse werden in Saroszyklen zusammen-gefaßt. Da die einzelnen Zyklen leicht unterschiedlich sind, wiederholen sich die Finsternisse im Saroszyklus nicht unbegrenzt. Zu einem vollständigen Saros gehören zwischen 68 und 77 Sonnenfinsternisse, die über einen Zeitraum von ca. 1200 Jahren verteilt sind. Er beginnt mit einer Reihe von partiellen Finsternissen in einem der Polgebiete. In diesem Fall verfehlt der Kernschatten noch die Erdoberfläche. Danach entwickelt sich eine Folge von totalen oder ringförmigen Finsternissen, die sich nach und nach zum entgegengesetzten Pol verlagern, wo schließlich die letzten Finsternisse des Saroszyklus - wieder als partielle - auftreten. Die einzelnen Saroszyklen werden durchnummeriert und zur Kennzeichnung von Sonnenfinsternissen verwendet. Die Finsternis vom 11. August 1999 gehörte zum Beispiel zum Saros-Zyklus Nr.145 (genauer, die 21. im Zyklus 145), bestehend aus 77 Ereignissen, die am 4. Januar 1639 begonnen haben und am 17. April 3009 enden.

Zwischen aufeinanderfolgenden Finsternissen eines bestimmten Saros gibt es viele andere, die zu anderen Zyklen gehören. Zurzeit gibt es 25 Zyklen, die zentrale (d.h. ringförmige oder totale) Finsternisse erzeugen. Daneben erzeugen 14 weiterer Zyklen nicht zentrale Finsternisse, die also nirgends auf der Erde als total oder ringförmig gesehen werden können.

Mondfinsternis

Eine Mondfinsternis entsteht, wenn der Mond in den Halbschatten der Erde (Halbschattenfinsternis), teilweise in den Kernschatten der Erde (partielle Mondfinsternis) oder ganz in den Kernschatten eintaucht (totale Mondfinsternis). Auch hier muß die Bedingung erfüllt sein, daß die Knotenlinie der Mondbahn in etwa mit der Verbindungslinie Erde-Sonne zusammenfällt. Ist zu diesem Zeitpunkt noch Vollmond, dann tritt zwangsläufig eine Mondfinsternis ein.

Die (geometrische) Kernschattenlänge errechnet sich analog zu (1.22)

$$l_{ks} = \frac{r_{se} R_{Erde}}{R_{Sonne} - R_{Erde}} \quad [1.24]$$

und mit $r_{se} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$ ergibt sich

$$l_{ks} = 1.39 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 218 R_{Erde}$$

Der Erdschatten reicht also immer weit über die Mondbahn (ca. $60 R_{Erde}$) hinaus.



In der partiellen Phase einer Mondfinsternis ist sehr schön der gekrümmte Erdschatten zu sehen. Während der Totalität leuchtet der Mond oft in einem mehr oder weniger intensiven kupferroten Licht.

Eine Halbschattenfinsternis ist mit freiem Auge praktisch nicht zu erkennen. Sie kann aber leicht photometrisch nachgewiesen werden. Während der totalen Phase verschwindet der Mond auch nicht völlig im Kernschatten der Erde. Vielmehr erscheint er i.d.R. dunkelrot bis purpurn, manchmal auch kupferfarben. Die Ursache liegt in der selektiven Absorption der Sonnenstrahlung in der Erdatmosphäre (blaues Licht wird stärker absorbiert als rotes), die dieses Licht auch in den Kernschattenkegel hinein beugt. Wie hell er einem Beobachter auf der Erde erscheint wird dabei maßgeblich vom Zustand der oberen Erdatmosphäre bestimmt. Ist z.B. viel Staub in der Atmosphäre vorhanden (z.B. nach größeren Vulkanausbrüchen), dann erscheint der verfinsterte Mond besonders dunkel. Hieraus ergibt sich (neben dem Naturerlebnis) in erster Linie die Motivation, totale Mondfinsternisse unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten zu beobachten. Durch die Bestimmung der Zeiten, wo der Erdschattenrand auffällige Mondformationen erreicht (z.B. Krater, Maregrenzen etc.), kann der genaue Durchmesser des Erdschattens berechnet werden der – wie Aufgabe ... zeigt – auch vom Zustand der Erdatmosphäre abhängt. Insbesondere lassen sich auf diese Weise Auswirkungen der Sonnenaktivität auf höhere Atmosphärenschichten studieren.

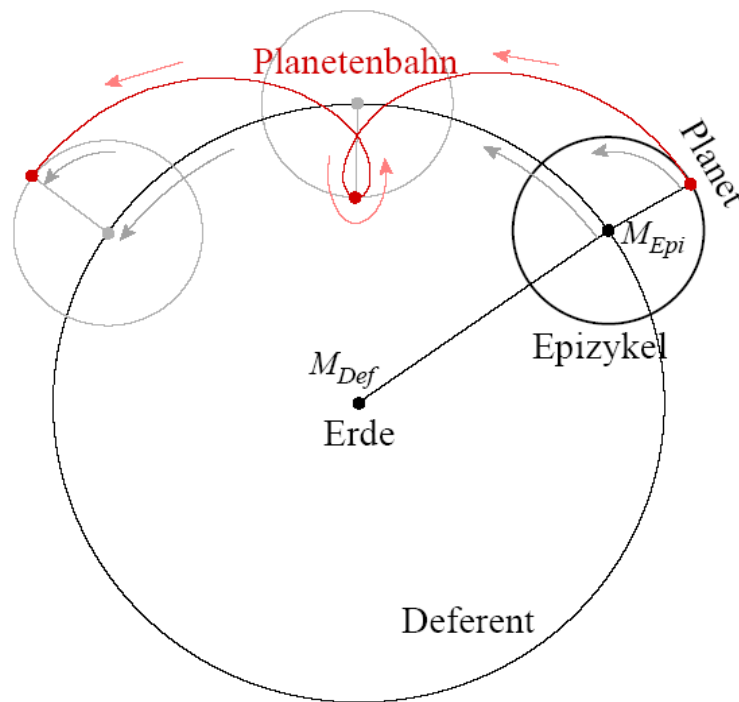
Scheinbare Planetenbahnen

Seit dem Altertum sind 5 Planeten – Wandelsterne, wie sie auch genannt werden, bekannt. Ihre Bahnen am Himmel wurden über die Jahrhunderte hinweg von den verschiedensten Völkern immer wieder beobachtet. Die Protokolle fanden Archäologen in Form von Zeichnungen an Felsen, formuliert in Hieroglyphen an Tempelmauern, geschrieben in Keilschrift auf aus Ton gebackenen Tafeln und auf „Papyri“ in den unterschiedlichsten Sprachen der verschiedensten Kulturkreise. Die antike Himmelsbeobachtung machte sich notwendig, um – besonders als die Menschen sesshaft geworden waren – verlässliche Zeitsysteme zu erhalten. Dafür sind die leicht zu beobachtenden periodischen Vorgänge am Himmel wie geschaffen. Dazu kam noch, daß die im Gegensatz zu den Fixsternen am Himmel unstetig dahin wandelnden Planeten oft eine religiöse und daraus abgeleitete astrologische Bedeutung erhielten. Die Planetennamen, ja sogar einige Namen der Tage einer Woche, weisen darauf hin. Die heute üblichen Planetenbezeichnungen entstammen dem römischen Pantheon. Genaugenommen stellen sie die römischen Pedanten griechischer Götter dar. Merkur z.B. wird mit dem griechischen Hermes, dem Götterboten, gleichgesetzt. Das Wort „Hermes“ findet man heute auf Merkurkarten, die man seit Mariner 10 zeichnen kann, in Form der „hermiographischen“ Länge und Breite wieder. Venus entspricht Aphrodite, der „Schaumgeborenen“ (es lohnt, wieder einmal bei GUSTAV SCHWAB nachzulesen ...), der römische Kriegsgott Mars entspricht Ares, Jupiter Zeus und Saturn Chronos. Später, als weitere Planeten entdeckt wurden, hat man die Tradition der Namensgebung fortgesetzt. Als WILHELM HERSCHEL (1738-1822) am 13.März 1781 den Planeten Uranus entdeckte, nannte er ihn überschwenglich „*Georgium Sidus*“ nach seinem königlichen Förderer GEORG III von England. Schon damals fand man das unmöglich und JOHANN ELERT BODE (1747-1826) in Berlin nannte ihn schlicht Uranus, was in der Fachwelt sofort auf allgemeine Zustimmung stieß (nur nebenbei, siehe GUSTAV SCHWAB: Uranus war Sohn und Geliebter von Gaia, Vater von Chronos, der Zyklopen und der Titanen).

Wenn man die Planeten von der Erde aus beobachtet und ihren Weg durch die Sternbilder des Tierkreises verfolgt, fallen einige Regelmäßigkeiten und Besonderheiten auf, die man schon in der Antike genauestens registrierte. Erstens: Merkur und Venus sind immer nur in unmittelbarer Nähe zur Sonne am Abend- oder Morgenhimmel auszumachen, während die Planeten Mars, Jupiter und Saturn zu manchen Zeiten, die man Opposition nennt, die ganze Nacht zu sehen sind. Zweitens: Alle Planeten bewegen sich in der Ekliptik (zur Erinnerung, sie entspricht der scheinbaren Sonnenbahn am Himmel) bzw. in deren unmittelbaren Nähe und zwar überwiegend von West nach Ost. Drittens: Manchmal bewegen sich die Planeten aber auch rückläufig von Ost nach West, wobei sie unterschiedlich große Schleifen unter den Fixsternen bilden. Diese Erscheinung ist besonders stark bei Mars ausgeprägt, aber auch bei Jupiter und Saturn während der Oppositionszeit gut zu beobachten. Bei den sonnennahen Planeten Merkur und Venus tritt Rückläufigkeit nur dann ein, wenn sie für einen irdischen Beobachter dicht an der Sonne vorbeigehen.

Im Großen und Ganzen gesehen, ist die Bewegung der Planeten unter den Sternen am Fixsternhimmel sehr kompliziert und es ist schwierig, Gesetzmäßigkeiten abzuleiten, die eine genaue Vorhersage zukünftiger Positionen erlauben. Um so größer ist die Leistung besonders der antiken griechischen Astronomen einzuschätzen, denen es gelang, eine Planetentheorie zu entwickeln, deren Genauigkeit bis zu den Zeiten KEPLERS und NEWTONS nicht übertroffen wurde.

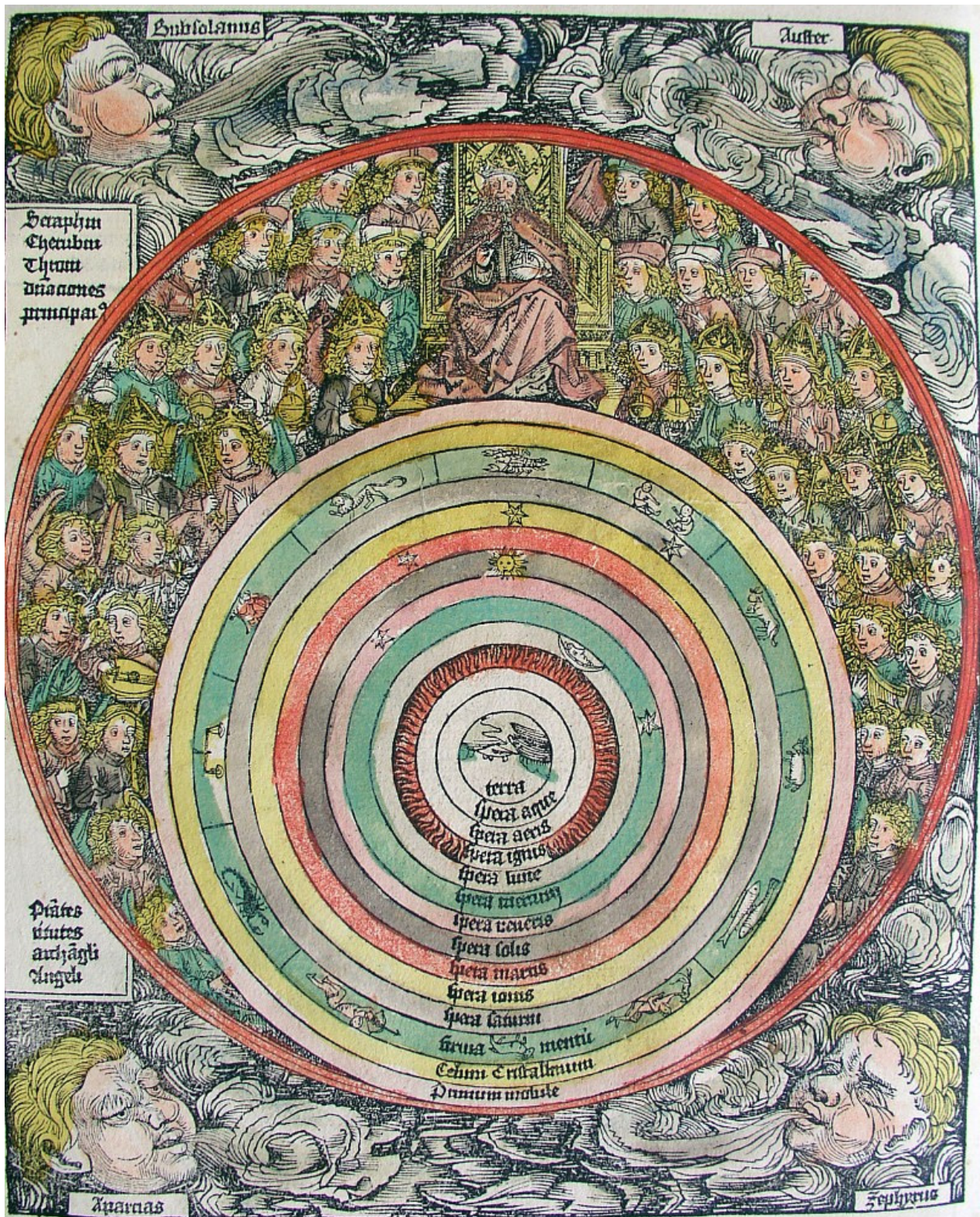
Ausgangspunkt – auch wegen seiner scheinbaren Offensichtlichkeit – war eine geozentrische Weltansicht. Der Mittelpunkt der Welt ist die Erde. Die von ARISTARCH VON SAMOS (ca. 310-230 v.Chr.) vorgeschlagene heliozentrische Sicht (sein Argument war – wie von PLUTARCH (um 46 bis 125 v.Chr.) überliefert – daß das heliozentrische System die Planetenbewegungen einfacher erklären kann als das geozentrische System) wurde später von HIPPARCH VON NIKAIÄ (ca. 161-127 v.Chr.) verworfen und zwar mit dem für die damalige (und auch spätere) Zeit schlüssigen Argument, daß die Fixsterne keine Parallaxe zeigen.



Entstehung der „Schleifenbewegung“ eines Planeten aus der Überlagerung der Bewegung auf einem Epizykel, welcher sich wiederum gleichförmig auf einem Deferenten bewegt.

Aus heutiger Sicht betrachtet, war die griechische Astronomie durchaus hoch entwickelt. Mathematische Methoden – insbesondere aus der Geometrie – erlaubten aus der Philosophie geborene Erklärungen auch praktisch zu erproben und mit konkreten Messungen der Planetenpositionen zu vergleichen. Um das Jahr 140 veröffentlichte CLAUDIOS PTOLEMAIOS (ca. 100 – 178) seine 13-bändige Beschreibung der Welt „*Megale Syntaxis*“, in der er das gesamte ihm zugängliche Wissen der Antike in Bezug auf die Astronomie zusammenfaßte. Dabei soll nicht unerwähnt bleiben, daß er entgegen dem Ehrencodex der reinen Wissenschaft Beobachtungen erfunden, verfälscht und Erkenntnisse anderer als seine ausgegeben hat, wie zuerst 1817 der französische Mathematiker JEAN BAPTISTE DELAMBRE (1749-1822) bewiesen hat. Trotz dieses Schattens, der auf PTOLEMAIOS fällt, hat sein Werk fast 2 Jahrtausende überdauert, was besonders den arabischen Übersetzern zu verdanken ist. Für sie war es sogar die „GröÙte“ (megiste) Zusammenstellung, woraus sich der populäre Name des Werks „*Almagest*“ herleitet. Der „*Almagest*“ ist ein überaus beeindruckendes Werk, welches eine Fülle von Themen abdeckt. Die ersten beiden Bände beinhalten die Grundlagen des ptolemäischen Weltbildes sowohl in kosmologischer als auch in geometrischer Form. Band 3 enthält die Theorie der Sonnenbewegung und beschreibt das Deferent-Epizykel-System in allen

Details. Die Bände 4, 5 und 6 sind ganz der Mondbewegung und der Erklärung einzelner Meßgeräte (z.B. des Astrolabs) gewidmet und in den letzten Bänden entwickelt er in beeindruckender Souveränität seine Planetentheorie.



Geozentrisches Weltbild des Mittelalters. Ausschnitt aus der Schedelschen Weltchronik (1493)

Das geozentrische Weltbild von PTOLEMAIOS ging von folgenden Voraussetzungen aus, die seit ARISTOTELES (384-322 v.Chr.) nicht mehr hinterfragt wurden bis NICOLAUS COPERNICUS (1473-1543) um 1510 das neuzeitliche heliozentrische Weltsystem wieder in die Diskussion brachte:

1. Der gesamte Weltraum ist mit einem Medium gefüllt, dem fünften Element („Äther“) des ARISTOTELES (diese Annahme hielt sich bis in die ersten Jahrzehnte des zwanzigsten Jahrhunderts, wo die „Ätherhypothese“ durch die Messungen von MICHELSON und MORLEY widerlegt und durch EINSTEINS Spezielle Relativitätstheorie auch nicht mehr benötigt wurde. Der „Äther“ des Einundzwanzigsten Jahrhunderts ist das „Physikalische Vakuum“ der modernen Quantenfeldtheorien).
2. Die Planeten dürfen sich nur auf Kreisbahnen bewegen, weil das die einzige vollkommene Bewegung ist. Ihre Bewegung ist gleichförmig (EUDOXOS VON KNIDOS, um 408–355 v.Chr.).
3. Die Erde ist ruhender Mittelpunkt der Welt.
4. Sie wird in folgender Reihenfolge von den Planeten umkreist: Merkur, Venus, dann folgt die Sonne, dahinter Mars, Jupiter und Saturn

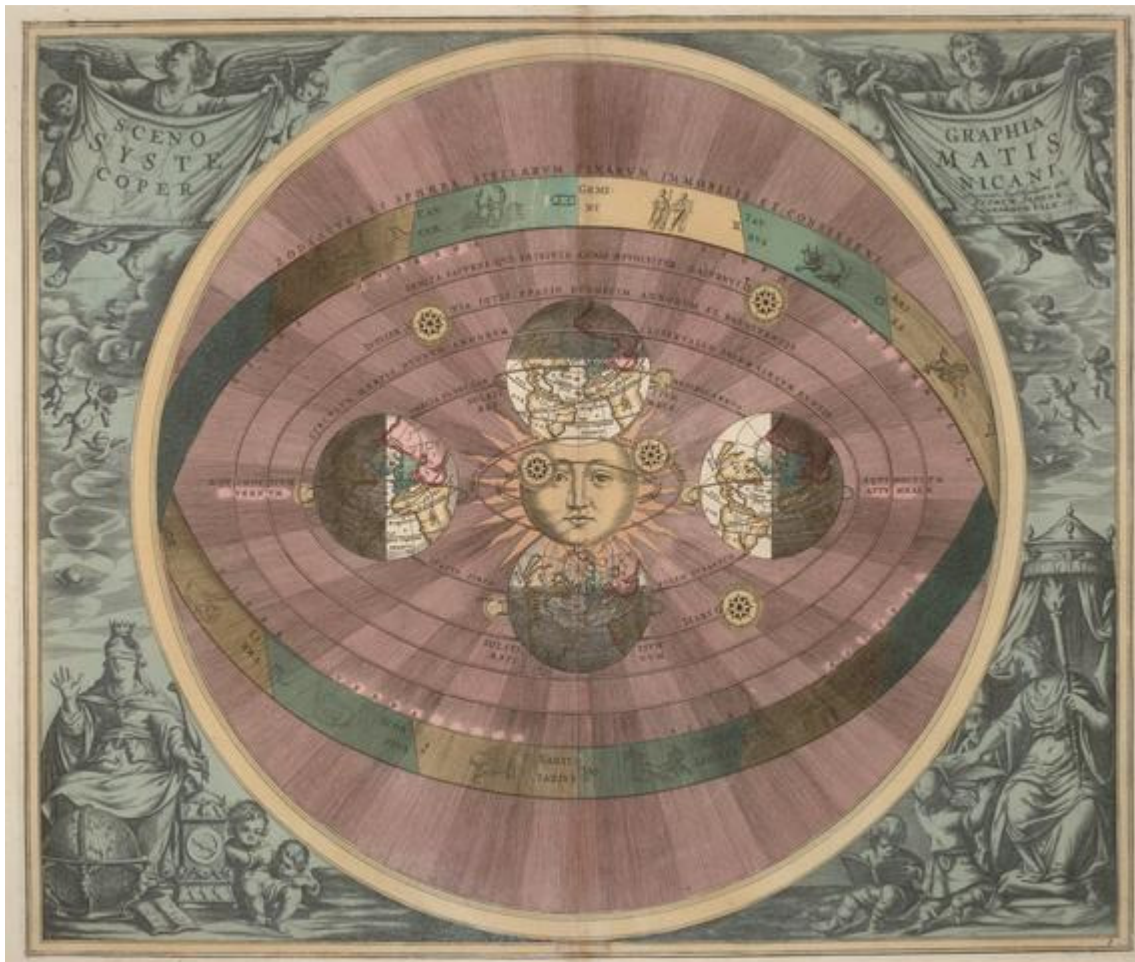
Aus diesen Voraussetzungen galt es eine geometrische Theorie zu entwickeln, welche die scheinbaren, z.T. rückläufigen und unterschiedlich schnellen Bewegungen der Planeten an der Himmelskugel relativ zu den Sternen erklärte und – noch wichtiger - vorhersagbar machten.

Die griechischen Astronomen fanden dafür eine geniale Lösung. Neben der konzentrischen Hauptbewegung um die Erde bewegen sich die Planeten noch zusätzlich auf einem Nebenkreis, einem Epizykel. Damit setzt sich die Planetenbewegung aus zwei Kreisbewegungen zusammen: Auf dem Hauptkreis (Deferent) läuft der Epizykel und auf dem Epizykel bewegt sich der Planet, wobei der Mittelpunkt des Epizykels immer auf dem Deferent liegt. Auf diese Weise kann man mit günstigen Parametern eine zusammengesetzte Bewegung konstruieren, welche z.B. die Schleifenbewegung recht gut wiedergibt. Eine weitere Verbesserung geht auf HIPPARCH zurück, der – einer Idee APOLLONIUS VON PERGE (220-190 v.Chr., er gilt übrigens als Begründer der Epizykeltheorie) folgend, den Mittelpunkt des Deferenten exzentrisch zur Erde legte. Da bei Sonne und Mond keine Schleifen zu beobachten sind, kommt ihre Beschreibung ohne Epizykel aus.

Die ganze Theorie wurde noch komplizierter, weil z.B. für die inneren Planeten weitere Zusatzannahmen notwendig waren, um mit den Beobachtungen gerecht zu werden. So müssen die Epizykelmittelpunkte der Planeten Merkur und Venus immer eine Linie mit der Erde und der Sonne bilden. Außerdem muß der Epizykel gegenüber dem Deferenten geneigt sein, um die gewünschte Schleifenbewegung zu erzeugen. Bei den äußeren Planeten wurde es auch nicht einfacher. Der Deferent weist eine gewisse Neigung gegenüber der Ekliptik auf, der Epizykel ist dagegen parallel usw.

Ein besonderes Problem für PTOLEMÄUS war der Planet Merkur. Es gelang ihm nie, mit normalen Epizykeln seine Bahn befriedigend zu beschreiben. Heute weiß man, daß die besonders große Bahnexzentrizität von 0.2056 (der zweitgrößten der großen Planeten!) die Ursache dafür ist. Auch die Mondbewegung läßt sich in der Epizykeltheorie nur schwer darstellen. Er mußte, um wenigstens befriedigende Ergebnisse zu erzielen, von der bereits 300 Jahre zuvor von HIPPARCH geäußerten Vermutung ausgehen, daß die Mondbahn elliptisch ist. Auch die von EUDOXOS zuerst formulierte

Bedingung, daß sich die Planeten immer gleichförmig auf dem Epizykel bewegen, führte zu gravierenden Abweichungen bei der Berechnung einer Ephemeride. Er war gezwungen davon auszugehen, daß sich die Planeten doch nicht gleichförmig bewegen. Deshalb läßt er den Mittelpunkt des Epizykels derart auf dem Deferenten laufen, daß die Winkelgeschwindigkeit nicht in bezug auf diesen Punkt, sondern in bezug auf einen anderen, davon abweichenden Punkt konstant ist. Dieser Punkt wird auch als Ausgleichspunkt oder lateinisch „*punctum aequans*“ bezeichnet. Nur von diesem Punkt aus erscheint die Bewegung gleichförmig. In moderner Darstellung und unter Vorwegnahme der Ergebnisse JOHANNES KEPLERS (1571-1630) kann man (bei kleiner Bahnexzentrizität) den „*punctum aequans*“ als zweiten Brennpunkt einer Ellipse deuten und die ungleichförmige Bahnbewegung als Resultat des 2. Keplerschen Gesetzes.

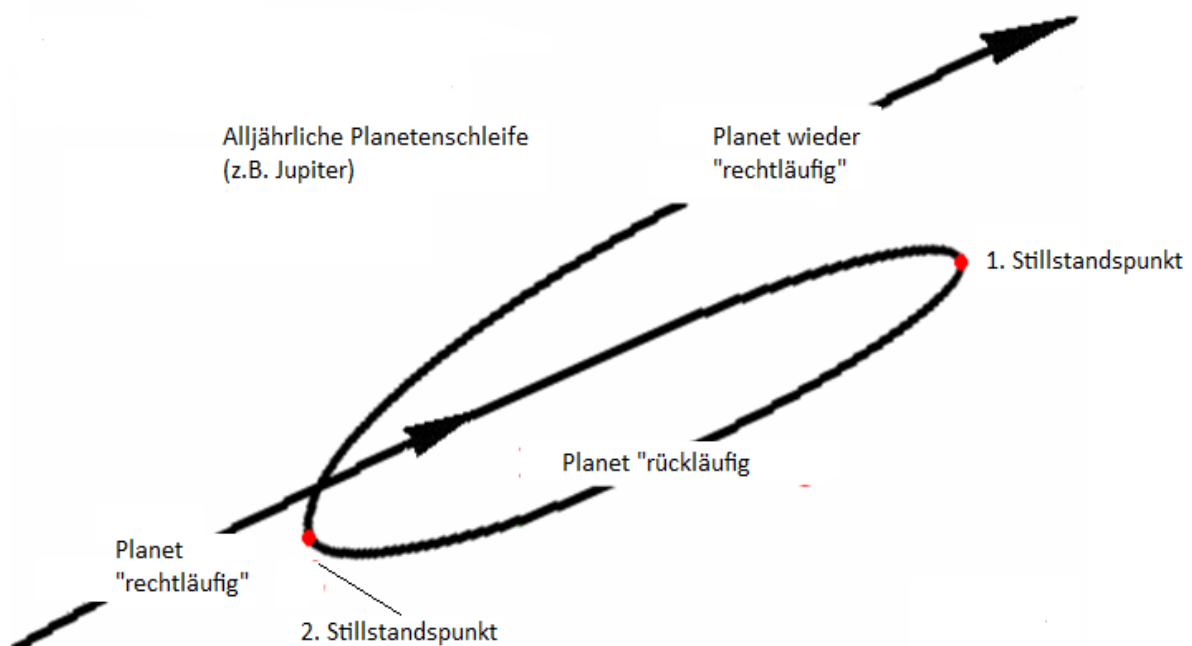


Darstellung des heliozentrischen Weltsystems (Andreas Cellarius, Harmonia Macrocosmica, 1708)

Schon relativ schnell stellte sich heraus, daß die nach der Epizykeltheorie berechneten Planetenörter im Laufe der Zeit immer mehr von den beobachteten Örtern abwichen. Trotzdem hatte das geozentrische Weltbild bis in das Zeitalter der Renaissance und der frühen Neuzeit hin Bestand. Das hatte in erster Linie theologische Gründe. Erst NICOLAUS COPERNICUS wagte es, die Erde aus ihrem festen Mittelpunkt zu reißen und die Sonne an ihre Stelle zu setzen. Aber auch er konnte sich noch nicht von den Epizykeln trennen und sein System war – was die Vorhersagekraft betraf – kaum besser als das des PTOLEMAIOS. Aber es erscheint uns heute (!) selbstverständlich als logisch einfacher! Logische Einfachheit ist aber mehr ein ästhetisches Prinzip (Stichwort „Occams

Rasiermesser“) und kann genaugenommen nicht zur Falsifizierung einer Theorie ernsthaft herangezogen werden. So gesehen mußte man noch mindestens bis JOHANNES KEPLER und ISAAC NEWTON (1643-1727) warten, die nach großen intellektuellen Anstrengungen in der Lage waren, das heliozentrische System in seinen Grundzügen zu beweisen. Aus heutiger Sicht führte ein günstiger gelegtes Koordinatensystem zu dieser Vereinfachung.

Wählt man unter Zuhilfenahme der Ergebnisse der modernen Himmelsmechanik die Erde als unbeweglichen festen Bezugspunkt, dann ergibt sich die Epizykeltheorie als Näherung aus der vektoriellen Addition von Planeten- und Erdbahn. Von diesem Standpunkt aus beschreibt die Sonne eine Ellipsenbahn um die Erde und die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne. Hieraus erkennt man, daß das heliozentrische und das geozentrische System im Grunde genommen kinematisch gleichwertig sind. Was man wählt ist nur eine Frage der Zweckmäßigkeit und das heliozentrische System von COPERNICUS ist ohne Zweifel zweckmäßiger – und auch physikalisch richtiger, wie die Entdeckung der Aberration des Lichtes 1500 Jahre nach PTOLEMAIOS zeigte. Das Ptolemäische System krankt in erster Linie daran, daß es nur – in heutiger Sprache – die Richtungen der geozentrischen Ortsvektoren der Planeten in seine Betrachtungen einbezieht und nicht deren Beträge respektive Entfernungen. Dadurch wird eine Erklärung der Bewegungen im mechanischen Sinne unmöglich, da es prinzipbedingt keine Aussagen über die wechselseitige räumliche Lage der Planeten (und der Sonne) treffen kann. Erst die heliozentrische Betrachtungsweise bietet überhaupt den Rahmen für etwas, das man als „Himmelsmechanik“ bezeichnen kann.



Alle 13 Jahre läßt sich am Himmel die Oppositionsschleife von Jupiter beobachten (Anblick von der Südhemisphäre)

Nach diesem kleinen geschichtlichen Exkurs zurück zu den scheinbaren Planetenbewegungen. Die Entstehung der Schleifenbewegung – ein Hauptproblem der antiken Astronomie – kann aus heliozentrischer Sicht sehr leicht erklärt werden. Der Hauptgrund liegt in den unterschiedlich großen Bahngeschwindigkeiten der Planeten, die im Sonnensystem von innen nach außen immer mehr abnehmen. Befindet sich z.B. ein äußerer Planet in Opposition (das ist dann der Fall, wenn Sonne, Erde und Planet eine Linie bilden), dann überholt die schnellere Erde diesen Planeten und es entsteht eine zeitweise entgegengesetzte, rückläufige Bewegung als Projektion am Himmel, wobei, da die Ebenen der Planetenbahnen zur Ekliptik geneigt sind, Schleifen entstehen. Die Zeit der Rückläufigkeit wird oft auch als Oppositionszeit bezeichnet. In seltenen Fällen kommt es vor, daß zwei Planeten ihre Oppositionsschleifen parallel durchführen. In diesem Fall können sich die beiden Planeten insgesamt dreimal begegnen, d.h. es tritt eine dreifache Konjunktion auf. Geschieht das mit Jupiter und Saturn, dann ist das eine Königsgestirnung.

Hipparch von Nikaia und die wahre Erdbahn

Bereits den Astronomen im alten Babylon war bekannt, daß die Sonne sich auf ihrer jährlichen Bahn entlang der Ekliptik unterschiedlich schnell bewegt, d.h. die Winkelgeschwindigkeit ist in verschiedenen Teilstücken ihrer Bahn unterschiedlich groß. Das äußert sich darin, daß das Winterhalbjahr (gerechnet vom Herbst-Äquinoktium bis zum Frühlingsäquinoktium) kürzer ist als das Sommerhalbjahr (das ist der Zeitraum zwischen dem Frühlingsäquinoktium und dem Herbstäquinoktium). Wir wissen heute, daß diese Tatsache einfach aus der elliptischen Erdbahn um die Sonne und dem zweiten Keplerschen Gesetz folgt. So gesehen ist es interessant zu sehen, wie Hipparch diese Beobachtung vor weit mehr als 2000 Jahren in eine mathematische Form brachte, aus der sich ein Näherungswert für die Exzentrizität der Erdbahn ableiten läßt.

Seine Grundidee besteht darin, die Erdbahn durch einen exzentrisch gelagerten Kreis darzustellen (man beachte, das hat nichts mit „Physik“ und der „wahren“ Bewegung der Erde zu tun), der mit einer gleichmäßigen Winkelgeschwindigkeit durchlaufen wird. Den Kreisumfang teilte er so in zwei Bogenstücke auf, daß deren Länge jeweils der Länge des Sommerhalbjahres und des (kürzeren) Winterhalbjahres entsprach (der Kreisumfang entspricht genau einem Jahr). Der kürzeste Abstand zwischen der Verbindungslinie der beiden Äquinoktien und dem Mittelpunkt M des Kreises sei e (die lineare Exzentrizität) und der Radius des Kreises 1 (d.h. es soll sich um einen Einheitskreis handeln). Verlegt man jetzt den Beobachterstandpunkt auf den Punkt K (dem Schnittpunkt der Geraden zwischen der Sommer- und Wintersonnenwende und den Äquinoktien), dann ergibt sich für diesen Beobachter eine ungleichförmige Winkelgeschwindigkeit für einen Punkt auf dem Kreis, der in bezug auf M eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit aufweist. Da bekannt ist, in welchen Zeiten die beiden Kreisbögen durchlaufen werden, kann man für das „Winterhalbjahr“ schreiben:

$$T_w = \frac{1}{2}T - \frac{e}{\pi}T = T \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi} \right)$$

Aufgrund des Einheitskreises kann man die lineare Exzentrizität e gleich der numerischen Exzentrizität ε setzen (wegen $e = \varepsilon a$, mit $a = 1$), woraus

$$\varepsilon = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{T_w}{T} \right)$$

folgt.

Weiterhin zeigen genaue Beobachtungen, daß der Zeitpunkt der größten (Perihel) und der kleinsten Winkelgeschwindigkeit der Sonne (Aphel) nicht mit dem Winter- bzw. dem Sommersolstitium

zusammenfällt. Verbindet man diese beiden Punkte auf dem Einheitskreis durch eine Gerade, die auch durch M und K geht (Apsidenlinie), dann erkennt man, daß der Winkel ϑ zwischen der Sonnenwendlinie und der Apsidenlinie ungefähr 13° beträgt. Korrigiert man damit die oben abgeleitete Formel, dann erhält man für die Exzentrizität der Erdbahn in diesem von Hipparch erdachten Modell

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2 \cos \vartheta} \left(\frac{1}{2} - \frac{T_w}{T} \right)$$

Mit $T=365.25$ d, $T_w=178.83$ Tage und $\vartheta=13^\circ$ erhält man $\varepsilon=0.0168$. Der exakte Wert ist übrigens 0.0162 – die Übereinstimmung ist also durchaus bemerkenswert. Der Erfolg dieses Modells war eine wichtige Motivation für die Einführung des „punctum aequans“ (Äquant) in die Epizykeltheorie. Physikalisch bedeutet er – zumindest aus heutiger Sicht - eine gewisse Vorwegnahme des Keplerschen Flächensatzes.

Die relative Lage der Planeten in bezug auf Sonne und Erde bezeichnet man als Konstellationen. Bei den inneren Planeten Merkur und Venus unterscheidet man:

Konjunktion

Befindet sich der innere Planet zwischen Erde und Sonne, dann spricht man von der unteren Konjunktion, steht er hinter der Sonne, dann hat er die obere Konjunktion erreicht.

Elongation

Die Elongation ist der Winkelabstand des Planeten zur Sonne. Da die inneren Planeten von der Erde aus betrachtet niemals in Opposition gelangen können, erreichen sie nur eine größte westliche und eine größte östliche Elongation.

Bei den äußeren Planeten gibt es nur eine Konjunktionsstellung (Gleichschein) und eine Oppositionsstellung:

Konjunktion

Der Planet befindet sich von der Erde aus gesehen hinter der Sonne und kann deshalb – wie der Neumond – nicht beobachtet werden. Er erreicht damit die größte Entfernung zur Erde.

Opposition

Der Planet bildet mit der Sonne eine Linie mit der Erde genau dazwischen. Er geht am Abend auf, wenn die Sonne untergeht und geht unter, wenn die Sonne aufgeht. Die Entfernung Erde-Planet ist am geringsten und sein Winkeldurchmesser im Fernrohr am größten.

Außerdem gibt es noch die Quadraturen, wenn Sonne und Planet an der Himmelskugel einen Winkelabstand von 90° haben.

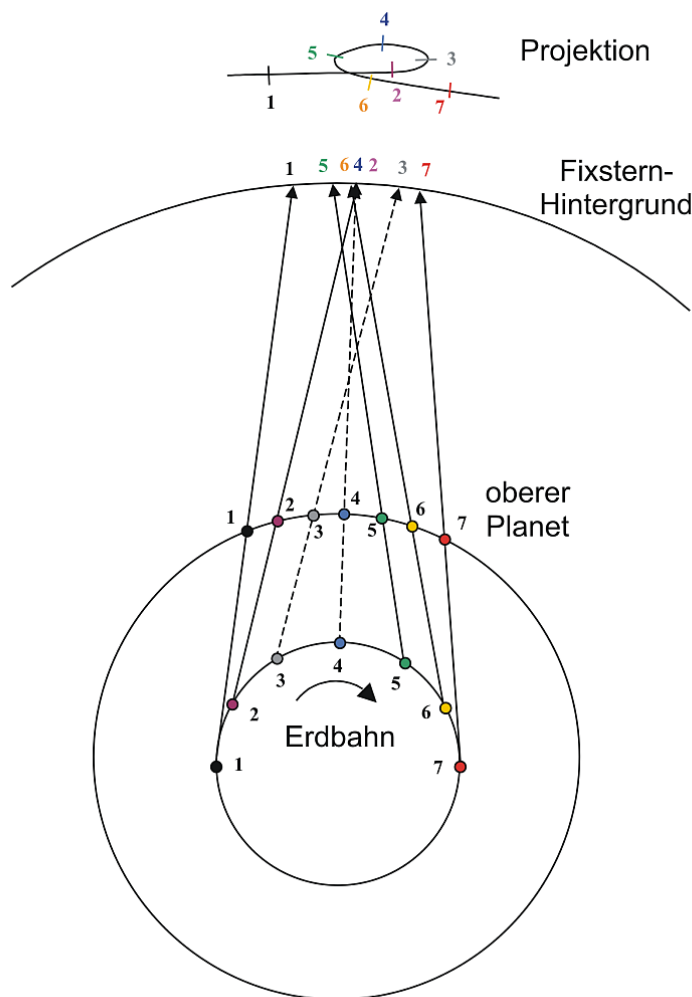
Durch die sich ständig ändernde relative Lage von Sonne, Erde und Planet zeigen alle Planeten Phasen, wobei die Phasen der inneren Planeten – wie beim Mond – einen ganzen Phasenzyklus umfassen. Als GALILEO GALILEI (1564-1642) 1609 mit seinem selbstgebaute Fernrohr die Venusphasen entdeckte, war für ihn deshalb der Streit zwischen dem geozentrischen und dem

heliocentrischen Weltsystem entschieden. Denn nur vom heliocentrischen Standpunkt aus ist der Phasenzyklus der Venus (und natürlich auch des Merkur) verständlich.

Als Phasenwinkel φ bezeichnet den Winkel, den Erde und Sonne vom jeweiligen Planeten aus gesehen, bilden. Bei einem äußeren Planeten wird dieser Winkel zum Zeitpunkt der Quadratur maximal.

Erwähnenswert in diesem Zusammenhang ist der sogenannte Schrötereffekt. Darunter versteht man die von HIERONYMUS SCHRÖTER (1745-1816) im Jahre 1793 zum ersten mal erwähnte zeitliche Diskrepanz zwischen der berechneten und der beobachteten Halbphase der Venus (Dichotomie), d.h. die „Halbvenus“ erscheint im Fernrohr (je nach Elongation) früher oder später als berechnet.

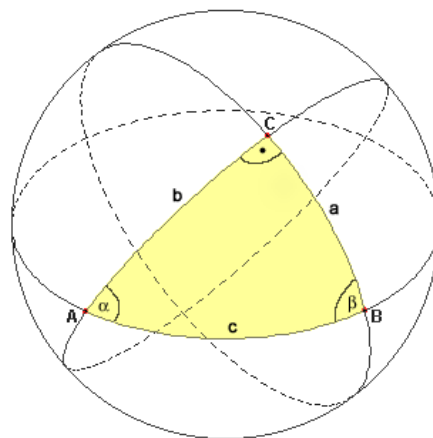
Die in diesem Kapitel erwähnten Planetenkonstellationen (manchmal auch als Aspekte bezeichnet) in bezug auf den Tierkreis spielen insbesondere in der Astrologie eine große Rolle und bescheren mehr oder weniger professionelle Astrologen auf Kosten der Sternengläubigen ein erkleckliches Einkommen. So gesehen gibt es also doch Sterntaler.



Entstehung einer Planetenschleife im heliozentrischen System

Sphärische Astronomie

Im Folgenden soll in verkürzter Form die Mathematik entwickelt werden, mit deren Hilfe die Astronomen Positionen an der Himmelskugel festlegen. Die Positionsastonomie hat mit vielfältigen Schwierigkeiten zu kämpfen. Da die Erde wie ein Kreisel rotiert, sich im Laufe eines Jahres um die Sonne bewegt und die Sonne mit der Erde um das Zentrum der Milchstraße und die Milchstraße ..., kurz gesagt, es ist nicht einfach ein von der Bewegung der Erde unabhängige Koordinatensystem zu definieren. Dazu kommt noch, daß uns der Himmel gewölbt erscheint wodurch die gewöhnliche Trigonometrie durch die sogenannte Sphärische Trigonometrie ersetzt werden muß, bei der z.B. Dreiecksseiten durch Winkel dargestellt werden. Der folgende Abschnitt ist eine kompakte Einführung in dieses Teilgebiet der Mathematik und Voraussetzung für die Behandlung der in der Astronomie verwendeten Koordinatensysteme.



Einführung in die sphärische Trigonometrie

Die scheinbare Himmelskugel kann als Einheitskugel mit dem Radius $R=1$ aufgefaßt werden. Ein Großkreis ist dann die Schnittlinie einer durch den Kreismittelpunkt gehenden Ebene, ein Kleinkreis die Schnittlinie einer Ebene, die nicht durch diesen Punkt geht. Sogenannte Eulersche Dreiecke ergeben sich aus den Schnittpunkten dreier Großkreise auf der Kugeloberfläche, die mit A, B und C bezeichnet werden sollen, wobei jeder Innenwinkel und jede Seite $< \pi$ ist. Die dazugehörigen Dreiecksbögen (das sind die Bogenabschnitte, die den Eckpunkten jeweils gegenüberliegen) werden dann mit a, b und c, die Innenwinkel mit α, β, γ und der Mittelpunkt der Himmelskugel mit M bezeichnet. Da der Radius auf 1 gesetzt ist, entsprechen die Längen a, b und c dem zum jeweiligen Bogen gehörenden Bogenmaß des Einheitskreises. Aus diesem Grund kann man in der sphärischen Trigonometrie die Seitenlängen von Dreiecken auch als Winkel auffassen, nämlich dem Winkel, unter dem sie vom Mittelpunkt M aus erscheinen. Das kommt der astrometrischen Positionsbestimmung sehr entgegen, da man am Himmel i. A. nur Winkelabstände messen kann.

Es ist offensichtlich, daß der Satz, nachdem die Innenwinkelsumme eines Dreiecks immer 180° oder π beträgt, nicht für sphärische Dreiecke gilt. Ganz allgemein kann man feststellen:

$$a, b, c < \pi$$

[2.1]

$$\alpha, \beta, \gamma < \pi$$

$$S = a + b + c \quad 0 < S < 2\pi$$

$$W = \alpha + \beta + \gamma \quad \pi < W < 3\pi$$

Die Differenz zwischen der Winkelsumme W und π wird auch als sphärischer Exzeß bezeichnet.

Als erstes soll ein Dreieck untersucht werden, deren Punkt A auf dem Meridian, der Punkt B beliebig und der Punkt C auf einem Himmelspol liegt. Der Vektor $\mathbf{MA} = \mathbf{a}$ besitzt dann folgende Komponenten

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sin b \\ 0 \\ \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad [2.2]$$

Die Seite b ist der Polabstand des Punktes A und erscheint hier als Argument einer Winkelfunktion. Für den Vektor $\mathbf{b}$ gilt dann mit γ als Winkel zwischen den Bögen a und b

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin a \cos \gamma \\ \sin a \sin \gamma \\ \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad [2.3]$$

Den Winkel, den die beiden Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufspannen, entspricht der Seite c , da $R=1$ gesetzt wurde. Man erhält den Bogen c , wenn man das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ bildet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sin b \\ 0 \\ \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin a \cos \gamma \\ \sin a \sin \gamma \\ \cos a \end{pmatrix} = \sin b \sin a \cos \gamma + \cos b \cos a = \cos c \quad [2.4]$$

Diese Beziehung gilt für jedes sphärische Dreieck und wird als Seiten-Kosinus-Satz bezeichnet. Die Bestimmungsgleichungen für die Seiten a und b ergeben sich durch zyklisches Vertauschen der Argumente, so daß folgender Formelsatz gilt:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \end{aligned} \quad [2.5]$$

Zu jedem sphärischen Dreieck ABC kann man ein weiteres Dreieck A'B'C' konstruieren, deren Eckpunkte Pole sind. Dabei versteht man unter einem Pol die Endpunkte eines Kugeldurchmessers, der senkrecht auf einem Großkreis steht. Die Himmelspole sind die Durchstoßungspunkte der Erdachse mit der Himmelskugel, wobei die Erdachse senkrecht zum Äquatorkreis steht. Senkrecht zur Erdbahnebene findet man die Pole der Ekliptik und die Pole im Horizontsystem sind der Zenit und der Nadir. Allgemein besitzt jeder Großkreis (der auch als Polare bezeichnet wird) zwei Pole.

Das Polardreieck A'B'C' zu dem Dreieck ABC kann folgendermaßen konstruiert werden: Dreht man den Bogen c am Punkt B um $\pi - \beta$, dann kommt c auf dem Großkreis, der den Bogen a enthält, zum liegen. Im gleichen Maße wandert der Pol C' der Polare c auf einem Großkreis zum Punkt A', wobei der Bogen b' überstrichen wird. Es gilt demnach:

$$b' = \pi - \beta$$

Den gleichen Vorgang kann man auch für die Bögen a und b ausführen woraus sich folgende Beziehungen ergeben:

$$a' = \pi - \alpha$$

$$c' = \pi - \gamma$$

Um ähnliche Beziehungen für die Winkel des Polardreiecks zu erhalten, geht man folgendermaßen vor: Man dreht die Seite c' des Polardreiecks im Punkt A' so, daß sie in den gleichen Großkreis fällt, in der die Seite b' liegt. Dann bewegt sich der Pol C der Polare c' zum Punkt B :

$$\alpha' = \pi - a$$

Für die anderen Winkel des Polardreieck $A'B'C'$ gilt dann analog:

$$\beta' = \pi - b$$

$$\gamma' = \pi - c$$

Da das Polardreieck auch ein sphärisches Dreieck ist, erhält man für den Kosinus der Seite c' gemäß dem Seiten-Kosinus-Satz

$$\cos c' = \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' \cos \gamma'$$

oder, da $\alpha + a' = \pi$, $\beta + b' = \pi$ und $\gamma + c' = \pi$ ist

$$\cos(\pi - \gamma) = \cos(\pi - \alpha) \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - \alpha) \sin(\pi - \beta) \cos(\pi - c) \quad [2.6]$$

woraus aus der Symmetrie der Winkelfunktionen

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

für das Dreieck ABC folgt. Diese Beziehung ist der Winkel-Kosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie. Die Gleichungen für die restlichen Winkel erhält man auch hier leicht durch zyklisches Vertauschen der Argumente:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned} \quad [2.7]$$

Löst man den Winkel-Kosinus-Satz z.B. nach dem Bogen c auf, dann erhält man

$$\cos c = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \quad [2.8]$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Beziehung

$$\sin^2 c = 1 - \cos^2 c \quad [2.9]$$

ein, dann ergibt sich unter Anwendung der Binomischen Formel

$$\sin^2 c = 1 - \frac{(\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta)^2}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

oder

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 c = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \quad [2.10]$$

Auch hier lassen sich zyklische Vertauschungen vornehmen ohne den Wert des Ausdrucks zu ändern, was zu folgender Äquivalenz führt:

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 c = \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 a = \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin^2 b$$

Da alle Winkel $< \pi$ sind, können die Quadrate weggelassen werden und man erhält

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin c &= \sin \gamma \sin a \\ \sin \beta \sin c &= \sin \gamma \sin b \\ \sin \beta \sin a &= \sin \alpha \sin b \end{aligned} \quad [2.11]$$

Daraus folgt der Sinus-Satz der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad [2.12]$$

Mit diesem Rüstzeug ist es leicht, die Transformationsformeln für Horizont- und rotierendes Äquatorialsystem herzuleiten. Doch zuvor müssen diese Koordinatensysteme definiert werden. Das soll im folgenden Abschnitt geschehen.

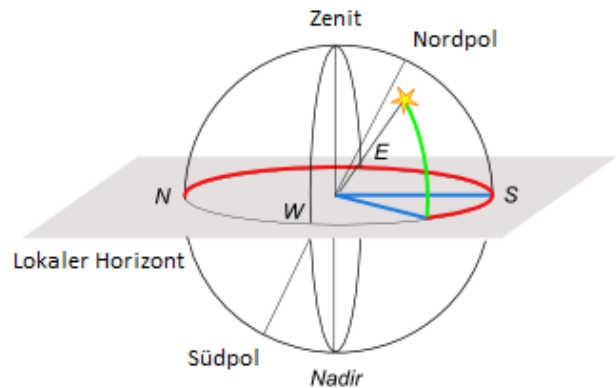
Astronomische Koordinatensysteme

Positionen am Himmel werden immer in Winkeln gemessen. Da die wahre Entfernung eines Gestirns meistens unbekannt ist, reichen zwei Winkelangaben (und eventuell eine Zeitangabe) aus, um seine Position an der Himmelskugel eindeutig festzulegen. Bei astronomischen Koordinatensystemen haben wir es also mit sphärischen Polarkoordinaten zu tun, wobei die Entfernung r einfachheitshalber 1 gesetzt (aber unendlich gedacht) wird. Da die Gestirnspositionen auf die Innenseite einer Hohlkugel projiziert erscheinen, verwendet man für Dreiecks-Berechnungen auf der Himmelskugel – wie im vorangegangenen Kapitel entwickelt – die sphärische Trigonometrie. Sie bildet die mathematische Grundlage der Astrometrie, dem Teilgebiet der Astronomie, das sich mit der Positionsbestimmung der als punktförmig angenommenen Himmelskörper an der Himmelskugel beschäftigt.

Das einfachste topozentrische Koordinatensystem ist das Horizontsystem. In diesem System wird die Position durch die Angabe eines Azimutwinkels und durch die Angabe einer Höhe bestimmt. Beide Größen sind sehr anschaulich: Das Azimut ist gleich dem vom Südpunkt in Richtung Westen

gemessenen Winkel bis zum Schnittpunkt des Vertikalkreises des Gestirns mit dem Horizont. Die Höhe ist der auf dem Vertikalkreis abgetragene Winkel zwischen dem Gestirn und dem Horizont. Anstelle der Höhe verwendet man alternativ oftmals die Zenitdistanz, wobei gilt: $Z=90^\circ-h$. Ein Stern mit der Höhe $h=90^\circ$ hat demnach die Zenitdistanz 0° , steht also genau im Zenit. Negative Höhenwerte besitzen Sterne, die sich unterhalb des Horizonts befinden und deshalb nicht sichtbar sind.

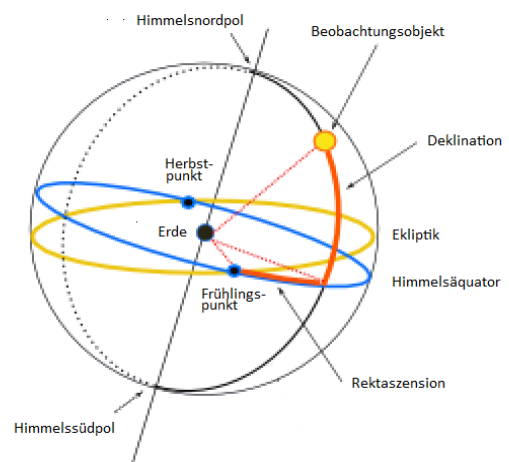
Der durch das Gestirn gehende und zum Horizont parallel verlaufende Kreis bezeichnet man als Almukantarat oder, moderner, Azimutalkreis und der Verbindungsbogen Horizont – Gestirn – Zenit als Vertikalkreis.



Azimet und Höhe eines Gestirns (oder eines Objekts auf der Erde) lassen sich sehr genau messen (mit Präzisionstheodoliten bis auf die Bruchteile einer Bogensekunde genau), wobei man – wegen der besseren Eichmöglichkeit – oftmals an Stelle der Höhe h die Zenitdistanz Z verwendet (die genaue Richtung zum Zenit kann man z.B. mit Hilfe eines Quecksilberhorizonts bestimmen). Trotzdem sind die damit erhaltenen Meßwerte für die Erstellung von Sternkatalogen etc. ungeeignet, da sich aufgrund der Erdrotation Azimet und Zenitdistanz ständig ändern. Derartige Messungen haben nur Sinn, wenn man auch den jeweiligen Zeitpunkt entsprechend genau mitbestimmt.

Da es die Aufgabe der Astrometrie ist, die Positionen von Himmelskörpern in einem möglichst unveränderlichen Koordinatensystem zu definieren, ist es notwendig, anstelle der Horizontebene eine andere Grundebene zu wählen, bei der die relative Position der Sterne nicht von der täglichen Bewegung der scheinbaren Himmelskugel abhängt. Diese Grundebene ist der Himmelsäquator und das dazugehörige Koordinatensystem das Äquatorialsystem.

Im Äquatorialsystem entspricht dem Horizontalkreis der Himmelsäquator. „Höhen“ sind demnach Winkel auf einem Vertikalkreis, der senkrecht auf dem Himmelsäquator steht und als Stundenkreis bezeichnet wird. Dieser von der Tageszeit unabhängige Winkel in Richtung eines Gestirns ist die Deklination δ . Sterne, die sich genau auf dem Himmelsäquator befinden, haben die Deklination 0° , Sterne südlich des Himmelsäquators eine negative und Sterne nördlich des Himmelsäquators eine positive Deklination.



Die Deklination reicht natürlich nicht aus, um die Position eines Gestirns eindeutig festzulegen. Man benötigt noch ein Äquivalent zum Azimut des Horizontsystems. Diese Koordinate ist der Stundenwinkel t . Er ist ähnlich wie das Azimut definiert, d.h. er wird vom Schnittpunkt des südlichen Vertikals (=Meridian) mit dem Himmelsäquator aus im Uhrzeigersinn, also über West,

Nord und Ost, gezählt. Auch hier ist ein Vollkreis 360° , nur daß man aus praktischen Gründen eine Stundenzählung verwendet. Danach entspricht der Vollkreis 24h, ein Halbkreis 12h und ein Viertelkreis 6h. Damit ist der Stundenwinkel eines Gestirns die (Stern-) Zeit, die seit der oberen Kulmination dieses Gestirns vergangen ist.

Da die Zählung des Stundenwinkels immer vom Meridian des Beobachtungsortes aus vorgenommen wird, ist er wegen der Erdrotation (oder äquivalent der scheinbaren Bewegung der Himmelskugel) proportional zurzeit veränderlich, während die Deklination sich nicht ändert. Um ein für astronomische Zwecke von der Erdrotation unabhängiges Koordinatensystem zu bekommen, muß man sich vielmehr auf einen festen Punkt auf dem Himmelsäquator beziehen, der quasi mit der Himmelskugel mitrotiert. Dieser Punkt ist der Frühlingspunkt. Er stellt den Schnittpunkt zwischen Himmelsäquator und scheinbarer Sonnenbahn (Ekliptik) dar, den die Sonne von Süden nach Norden zum Zeitpunkt des Frühlingsäquinoktiums (um den 21.März) überschreitet. Die „gerade Aufsteigung“ oder Rektaszension α ist damit der in Stunden, Minuten und Sekunden gemessene Winkel zwischen dem Frühlingspunkt und dem Schnittpunkt des Stundenkreises (Deklinationskreis) mit dem Himmelsäquator.

Dieser Winkel wird im Unterschied zum Horizontsystem entgegengesetzt der täglichen Bewegung der Himmelskugel in Richtung Süden, Osten, Norden und Westen (also entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn) gezählt. Auf diese Weise erreicht man, daß er genau dem Zeitunterschied aufeinanderfolgender Meridiandurchgänge von Gestirn und Frühlingspunkt entspricht. Die Sternzeit ist demnach gleich der Rektaszension eines Gestirns plus seinen Stundenwinkel. Da im Meridian der Stundenwinkel 0° ist, braucht man zur Sternzeitbestimmung nur den Meridiandurchgang eines Sterns mit bekannter Rektaszension zu beobachten. Umgekehrt bedeutet das, daß man die Rektaszension eines Gestirns einfach dadurch bestimmen kann, in dem man die Sternzeit seiner oberen Kulmination mißt.

Dazu werden spezielle Fernrohre verwendet, die genau nach Süden ausgerichtet sind und sich nur in Höhe bewegen lassen. Diese speziellen Fernrohre, die der scheinbaren täglichen Bewegung der Gestirne nicht nachgeführt werden, sind Meridiankreise und Durchgangsinstrumente. Mit ihrer Hilfe wurden besonders im 18. und 19. Jahrhundert umfangreiche Durchmusterungen zur Erstellung von Sternkatalogen und Sternkarten durchgeführt, deren bekanntesten die Bonner Durchmusterung (Nordhimmel) und die Cordoba-Durchmusterung (Südhemisphäre) sind. Heute haben diese Präzisionsinstrumente ihre ursprüngliche Bedeutung zur Erstellung genauer Sternkarten verloren. Astrometrische Satelliten wie Hipparcos (*High Precision Parallax Collecting Satellite*) erlauben mittlerweile Positionsbestimmungen von Fixsternen mit einer Genauigkeit von 1 bis 2 Millibogen Sekunden, die mit herkömmlichen Methoden, also durch Durchgangsmessungen bzw. Messungen auf Fotoplaten, unerreicht sind. Z.Z. wird eine neue Generation von derartigen Satelliten entwickelt, mit deren Hilfe man die Genauigkeit von Positionsbestimmungen weiter erhöhen möchte.

Wie bereits erwähnt, ist der Sterntag – also die Zeit zwischen zwei Meridiandurchgängen (obere Kulmination) – etwas kürzer als der Sonnentag. Er wird in 24 Stunden Sternzeit unterteilt (und darf nicht mit der Sonnenzeit verwechselt werden, da 24 Stunden Sonnenzeit etwas anderes sind als 24 Stunden Sternzeit).

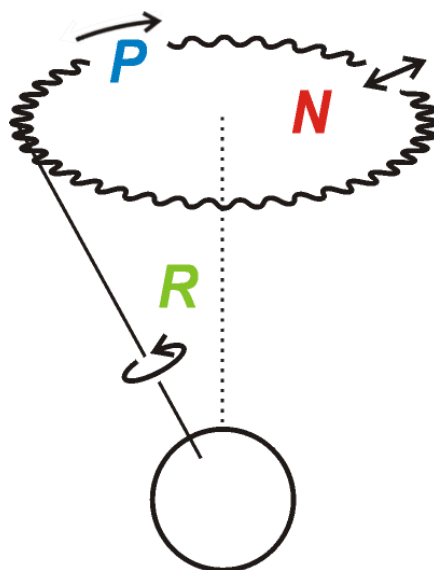
Die Sternzeit Θ ist der Stundenwinkel t des Frühlingspunktes und mit der Rektaszension α durch folgende Beziehung verknüpft:

$$\Theta = t + \alpha \quad [2.13]$$

Zu beachten ist noch, daß es sich bei der Sternzeit um eine Ortszeit handelt, da sie immer auf den Meridian des Beobachters bezogen wird.

Das rotierende Äquatorialsystem ist damit das Koordinatensystem, das in der Astrometrie am häufigsten Verwendung findet. Alle Positionsangaben in Sternkatalogen sowie in Planeten-, Planetoiden und Kometenephemeriden erfolgen in diesem System.

Leider ist aufgrund der Präzessionsbewegung der Erdachse die Lage des Frühlingspunktes zeitlich nicht konstant. Der Grund dafür ist, daß die Erdachse gegenüber der Erdbahnebene um rund 23.5° geneigt ist und sich deshalb die Erde unter dem Einfluß der Sonnen- und Mondanziehung wie ein Kreisel verhält. Durch ihre gemeinsame Anziehungskraft entsteht ein Drehmoment auf den Äquatorwulst der abgeplatteten Erde, das nach den Gesetzen der Kreiseltheorie die Äquatorebene in Richtung der Erdbahnebene (Ekliptik) zurückzudrehen versucht. Folgerichtig versucht die Rotationsachse diesem Drehmoment rechtwinklig auszuweichen, wodurch sich die Achse auf dem Mantel eines Doppelkegels bewegt, dessen Spitze mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt und dessen Achse senkrecht auf der Erdbahnebene steht. Dieser Doppelkegel wird als Präzessionskegel bezeichnet und der Durchstoßungspunkt seiner Achse mit der Himmelskugel Pol der Ekliptik.



Rotation R, Präzession P und Nutation N der Erdachse

Ein voller Umlauf der Erdachse um diesen Kegel wird platonisches Jahr genannt und dauert rund 25700 Jahre. Mit dieser Verlagerung der Erdachse verändert sich natürlich auch der Schnittpunkt der Äquatorebene mit der Erdbahnebene, so daß sich im gleichen Zeitraum der Frühlings- und der Herbstpunkt einmal um den Himmelsäquator bewegt und zwar entgegengesetzt der scheinbaren jährlichen Bewegung der Sonne an der Himmelskugel (also von Ost nach West). Hieraus folgt, daß

man Positionsangaben im rotierenden Äquatorialsystem immer auf einen Zeitpunkt, d.h. eine Epoche, beziehen muß. Zurzeit gilt als Epoche die Frühlings-Tag- und Nachtgleiche (Äquinoktium) des Jahres 2000. Um die wahren Äquatorialkoordinaten eines Gestirns für einen vorgegebenen Zeitpunkt zu bestimmen, ist eine Präzessionskorrektur erforderlich. Die entsprechenden Korrekturterme kann man entweder berechnen oder Präzessionstafeln entnehmen.

Neben der Luni-Solarpräzession mit dem Platonischen Jahr als Periode gibt es weitere periodische Ortsverschiebungen, die mit Schwankungen der Erdachse zu tun haben und die bei sehr genauen Positionsbestimmungen mit berücksichtigt werden müssen. Als Beispiel sei an dieser Stelle nur die Nutation genannt, deren größter Anteil sich mit einer Periode von 18.6 Jahren der Präzession überlagert und hauptsächlich vom Mond verursacht wird.

Die Präzessions- und die Nutationsperioden sind nur verschiedene Frequenzen ein und derselben Naturerscheinung. Es ist falsch zu sagen, daß die Präzession von der Sonne und die Nutation vom Mond verursacht werden. Der Mond ist aufgrund seiner geringen Entfernung von der Erde für ungefähr 2/3 des Effekts verantwortlich. Für den restlichen Teil ist zum überwiegenden Teil die Sonne zuständig, aber auch die anderen Planeten liefern einen meßbaren Anteil zur Präzession / Nutation. Ihr Anteil liegt bei ungefähr einer halben Bogensekunde pro Jahr und wird als planetare Präzession bezeichnet.

Position des Polarsterns zu verschiedenen Epochen

Epoche	RA	Dekl.	1900.0	1:22.6	+88.77
1950.0	1:48.8	+89.03	1990.0	2:21.3	+89.22
2000.0	2:31.8	+89.26	2010.0	2:43.6	+89.31
2050.0	3:47.5	+89.46			

Für die meisten Aufgaben der Positionsastonomie ist das Äquatorialsystem das Koordinatensystem der Wahl. Darüber hinaus gibt es auch noch andere Systeme, die sich vom Äquatorialsystem durch ihre Bezugsebene unterscheiden. Untersucht man z.B. die Bewegung der Planeten und Planetoiden im Sonnensystem, dann ist es günstiger, als Bezugsebene nicht den Himmelsäquator, sondern die Projektion der Erdbahnebene an die Himmelskugel zu verwenden (was, rein anschaulich gesprochen, der Bahn der Sonne an der Himmelskugel entspricht). Man erhält auf diese Weise das Ekliptikalsystem. Der Rektaszension entspricht hier der ekliptikalen Länge λ und der Deklination die ekliptikale Breite β .

Für die Untersuchung von Objekten in unserem Milchstraßensystem eignet sich wiederum am besten ein Koordinatensystem, dessen Bezugsebene mit der galaktischen Ebene zusammenfällt. Dieses System nennt man „Galaktisches System“. Die Koordinaten werden mit b (galaktische Breite) und mit l (galaktische Länge) bezeichnet. Der Nullpunkt der Längencoordinate ist hier nicht durch den Frühlingspunkt gegeben, sondern durch die Richtung zum galaktischen Zentrum im Sternbild Schütze (Sagittarius).

Im folgenden Abschnitt werden diese Koordinatensysteme etwas ausführlicher behandelt und die Transformationsformeln zur Umrechnung zwischen den Systemen abgeleitet.

Koordinatentransformationen

Äquatorialsystem – Horizontsystem

Ausgangspunkt ist das sogenannte Nautische Dreieck Himmelspol P – Zenit Z und Sternposition X (α, δ). Der Winkelabstand Pol-Zenit ist im Nautischen Dreieck $PZ=90^\circ - \varphi$, der Abstand Zenit-Stern beträgt $PX=90^\circ - h$ und der Abstand Pol-Stern $PX=90^\circ - \delta$. Der Winkel zwischen Stern, Zenit und Pol ist $180^\circ - A$ und der Winkel Zenit-Pol-Stern ist gleich dem Stundenwinkel t . Die Polhöhe entspricht der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes. Der Stundenwinkel t des Sterns ergibt sich aus der Rektaszension α und der Sternzeit Θ zu

$$t = \Theta - \alpha .$$

Zur Berechnung der Zenitdistanz $z=90^\circ-h$ kann der Seitenkosinussatz (2.5) verwendet werden:

$$\cos(\overline{ZX}) = \cos(\overline{PZ}) \cos(\overline{PX}) + \sin(\overline{PZ}) \sin(\overline{PX}) \cos t \quad [2.14]$$

also mit der Zenitdistanz $\overline{ZX} = z = 90^\circ - h$, dem Zenitabstand zum Himmelspol $\overline{PZ} = 90^\circ - \varphi$ und dem Winkelabstand von Stern zum Pol $\overline{PX} = 90^\circ - \delta$:

$$\cos z = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t \quad [2.15]$$

und da allgemein gilt: $\sin \beta = \cos(90^\circ - \beta)$ und $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$, vereinfacht sich die Beziehung für die Zenitdistanz z :

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad [2.16]$$

Zur Berechnung des Azimuts geht man am einfachsten vom Sinussatz für den Stundenwinkel t aus:

$$\frac{\sin t}{\sin(90^\circ - z)} = \frac{\sin(360^\circ - A)}{\sin(90^\circ - \delta)} \quad [2.17]$$

also

$$\sin(360^\circ - A) = \frac{\cos \delta \sin t}{\cos z} \quad [2.18]$$

und nach Anwendung des Additionstheorems $\sin(a+b)=\sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$\sin A = -\frac{\cos \delta \sin t}{\cos z} \quad [2.19]$$

Die Berechnung des Azimutwinkels nach Gleichung (2.19) ist leider wegen der Mehrdeutigkeit des Sinus nicht eindeutig. In welchem Quadranten sich A befindet, muß aus weiteren Rechnungen (z.B. $-\sin z \cos A = \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi \cos \delta \cos t$) oder Plausibilitätsbetrachtungen geschlossen werden. Außerdem erweist es sich bei praktischen Anwendungs-fällen als ungünstig, daß in (2.19) z aus

Formel (2.16) eingeht (Fehlerfortpflanzung). Aus diesem Grund verwendet man in der Geodäsie und in der Positionsastonomie einen anderen Satz von Transformationsgleichungen, der diese Mängel nicht aufweist. Er soll hier ohne Ableitung angegeben werden:

$$\begin{aligned}\sin A \cos h &= \cos \delta \sin t \\ \cos A \cos h &= \cos t \cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \\ \sin h &= \cos t \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi\end{aligned}\quad [2.20]$$

Für die Rücktransformation vom Horizontsystem in das Äquatorialsystem gilt folgender Formelsatz:

$$\begin{aligned}\sin t \cos \delta &= \sin A \cos h \\ \cos t \cos \delta &= \cos A \cos h \sin \varphi + \sin h \cos \varphi \\ \sin \delta &= -\cos A \cos h \cos \varphi + \sin h \sin \varphi\end{aligned}\quad [2.21]$$

Äquatorialsystem – Ekliptikalsystem

Verwendet man die Ekliptik als Grundkreis eines sphärischen Koordinatensystems, dann erhält man das Ekliptikalsystem. Der Deklination im Äquatorialsystem entspricht hier der ekliptikalen Breite β . Sie gibt den Winkelabstand eines Objektes senkrecht zur Ekliptik an. Die ekliptikale Länge λ wird genauso wie die Rektaszension vom Frühlingspunkt aus ostwärts gezählt, wobei man in diesem Fall statt Zeit- Gradangaben verwendet. Auch hier lassen sich die Transformationsgleichungen leicht herleiten. Bezeichnet man mit ε die Schiefe der Ekliptik, dann gilt:

$$\begin{aligned}\sin \lambda \cos \beta &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \\ \cos \lambda \cos \beta &= \cos \delta \cos \alpha \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha\end{aligned}\quad [2.22]$$

und für die Rücktransformation:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \delta &= -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \\ \cos \alpha \cos \delta &= \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \delta &= \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda\end{aligned}\quad [2.23]$$

Das Ekliptikalsystem spielt bei der Bahnbestimmung und Ephemeridenrechnung von Objekten im Sonnensystem eine große Rolle.

Äquatorialsystem – Galaktisches System

Die Umrechnung von Äquatorialkoordinaten in galaktische Koordinaten gelingt leicht mit folgenden Formelsatz:

$$\begin{aligned}\cos b \cos(l - 33^\circ) &= \cos \delta \cos(\alpha - 282.25^\circ) \\ \cos b \sin(l - 33^\circ) &= \sin \delta \sin 62.6^\circ + \cos \delta \sin(\alpha - 282.25^\circ) \cos 62.6^\circ \\ \sin b &= \sin \delta \cos 62.6^\circ - \cos \delta \sin(\alpha - 282.25^\circ) \sin 62.6^\circ\end{aligned}\quad [2.24]$$

Für die Rücktransformationen gilt dann:

$$\begin{aligned}\cos \delta \cos (\alpha - 282.25^{\circ}) &= \cos b \cos (l - 33^{\circ}) \\ \cos \delta \sin (\alpha - 282.25^{\circ}) &= \cos b \sin (l - 33^{\circ}) \cos 62.6^{\circ} - \sin b \sin 62.6^{\circ} \\ \sin \alpha &= \cos b \sin (l - 33^{\circ}) \sin 62.6^{\circ} + \sin b \cos 62.6^{\circ}\end{aligned}\quad [2.25]$$

Das galaktische Koordinatensystem wurde 1932 eingeführt und die Lage der Koordinatenachsen aus optischen Beobachtungen abgeleitet. Die Genauigkeit war dabei nicht besonders groß. SULLIVAN et.al. haben 1958 deshalb eine Neubestimmung aus radioastronomischen Beobachtungen der 21 cm-Emission des neutralen Wasserstoffs vorgenommen. Die Äquatorialkoordinaten des galaktischen Zentrums sind für das Äquinoktium 2000.0:

$$\alpha = 17^h 45.6^m \quad \delta = -28^{\circ} 56'$$

Zusammenfassung: Astronomische Koordinatensysteme

System	Grundkreis	Nullpunkt	Pol	Koordinaten
Horizontsystem	Wahrer Horizont	Südpunkt	Zenit	Azimut und Höhe
Rotierendes Äquatorialsystem	Himmelsäquator	Frühlingspunkt	Himmelsnord- und Südpol	Rektaszension und Deklination
Ekliptiksystem	Ekliptik	Frühlingspunkt	Pole der Ekliptik	Ekliptikale Länge und Breite

Auf- und Untergangszeiten

Den Bogen, den ein Gestirn bei seiner täglichen Bewegung an der Himmelskugel über dem Horizont zurücklegt, bezeichnet man als Tagbogen. Für Zirkumpolarsterne beträgt er 360° (d.h. sie gehen weder auf noch unter). Gestirne, deren Deklination kleiner als $90^{\circ} - \varphi$ ist, haben einen Tagbogen kleiner 360° . Der halbe Tagbogen entspricht demnach der Zeit, den ein Gestirn an einem Beobachtungsort der geographischen Breite φ von seinem Aufgang bis zur Kulmination bzw. von der Kulmination bis zu seinem Untergang benötigt. Um den Zeitpunkt für den Auf- und Untergang zu berechnen, muß demnach der Stundenwinkel t_a bzw. t_u bestimmt werden. Das nautische Dreieck für den halben Tagbogen ist ein Spezialfall eines sphärischen Dreiecks (rechtseitiges Dreieck), wo die Zenitdistanz von Auf- bzw. Untergangspunkt genau 90° beträgt.

Aus der Formel (2.16) errechnet man mit $z=90^{\circ}$ den halben Tagbogen von Aufgang bis zur Kulmination:

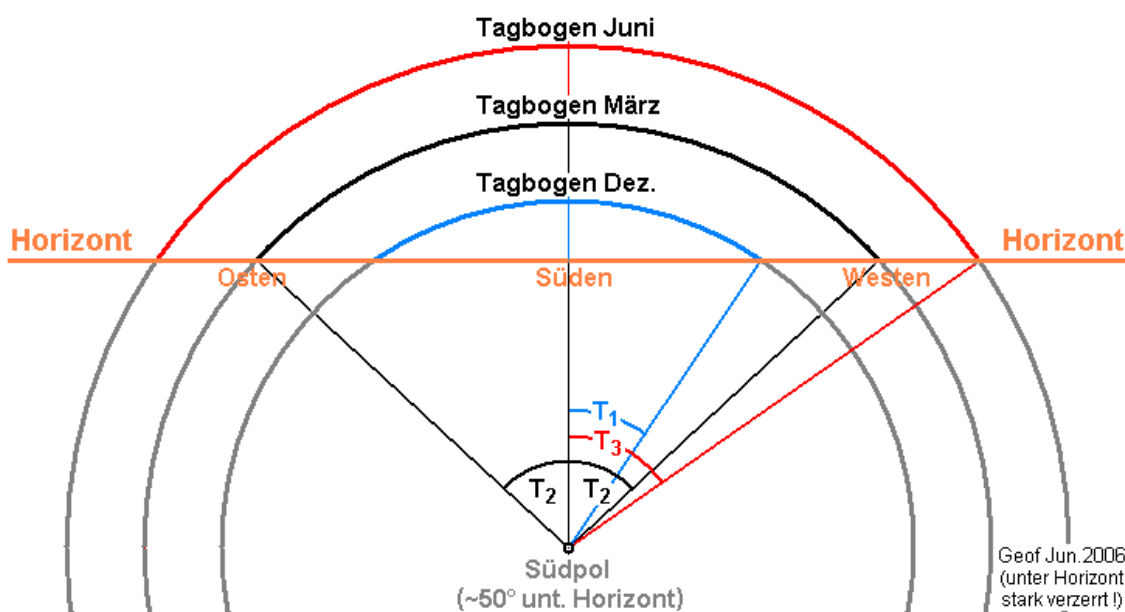
$$\cos t_a = -\tan \varphi \tan \delta \quad [2.26]$$

Ist die Rektaszension α und der halbe Tagbogen t_a bekannt, dann läßt sich mit (2.27) die Ortssternzeit für den Aufgang und für den Untergang bestimmen:

$$\Theta_a = \alpha - t_a \quad [2.27]$$

$$\Theta_u = \alpha + t_a$$

Die Formel (2.26) bezieht sich auf den mathematischen (topozentrischen) Horizont. In Wirklichkeit muß man bei der Berechnung des Auf- und Untergangs die Lichtbrechung in der Atmosphäre (Refraktion) mit berücksichtigen. In Horizontnähe beträgt die Refraktion ungefähr ein halbes Grad. Die Sonne und der Mond befinden sich deshalb bereits unter dem Horizont, wenn sie für einen Beobachter gerade den Horizont berühren.



Lage des Tagbogens der Sonne in Mitteleuropa für verschiedene Monate

Astronomische Ortsbestimmung

Die Geschichte der Ortsbestimmung – also der eindeutigen zahlenmäßigen Festlegung eines Ortes auf der Erde oder auf dem Meer durch Länge und Breite – ist eng mit der Entwicklung der Seefahrt verbunden. Insbesondere in der Zeit der großen geographischen Entdeckungen – gekennzeichnet durch die Erkundung der Küsten Afrikas unter „HEINRICH DEM SEEFAHRER“ (1394 - 1460) und der Entdeckung der Neuen Welt durch CHRISTOPH KOLUMBUS (1492) war die Ortsbestimmung auf See ein äußerst wichtiges Thema. Zwar war man in der Lage, die geographische Breite mit Hilfe eines Astrolabiums (dem Vorläufer der Theodolite) relativ sicher zu bestimmen. Die sichere Bestimmung der geographischen Länge war dagegen ein kaum lösbares Unterfangen.

So stellte PHILIPP II (1527 - 1598) von Spanien im Jahre 1598 eine bedeutende Summe für denjenigen bereit, der eine genaue Ortsbestimmung zu See durchführen kann. Wegen des Fehlens astronomischer Kenntnisse erreichte man damals jedoch lediglich eine Genauigkeit von etwa 5° , die in Äquatornähe einem Fehler von einigen hundert Kilometern entspricht. Erst mit der Entwicklung von seetauglichen genauen Uhren (sogenannten Schiffschronometern) wurde die Längenbestimmung auf ein Niveau gebracht, welches eine zuverlässige Bestimmung von Länge und Breite einer Schiffposition erlaubte und das Zerschellen von Schiffen in Küstengewässern verhinderte.

Bei der astronomischen Ortsbestimmung benötigt man eine genaue Uhr und ein Meßgerät, mit dessen Hilfe die Höhe von Sternen über dem Horizont (oder deren Zenitdistanz, was dem äquivalent ist) bestimmt werden kann. Solch ein Meßgerät ist z.B. der Theodolit.

Ein Stern mit den äquatorialen Koordinaten α, δ steht zu einer bestimmten Ortssternzeit Θ_0 (bezogen auf den Nullmeridian) über einem Punkt der Erde mit den Koordinaten $L = \Theta_0 - \alpha$, $\varphi = \delta$ genau im Zenit. Sein Stundenwinkel t ist zu seiner Ortssternzeit Θ_p offensichtlich Null, da die Differenz der beiden Zeitpunkte (also $\Theta_0 - \Theta_p$) gleich der geographischen Länge L ist, woraus $L = \Theta_0 - \alpha$ folgt. Alle Orte, für die dieser Stern zu einem festen Zeitpunkt τ die Zenitdistanz z hat, liegen auf einem Kreis mit dem Radius z um L, φ . Dieser Kreis wird als Standlinie bezeichnet. Wenn man also zu einem Zeitpunkt τ die Zenitdistanz z eines bekannten Sterns mit den Koordinaten α, δ bestimmt, dann weiß man, daß man sich irgendwo auf dieser Standlinie befindet. Bestimmt man jetzt für einen zweiten Stern, dessen Äquatorialkoordinaten sich vom ersten Stern unterscheiden, auch die Zenitdistanz z , dann erhält man eine weitere Standlinie, welche die erste Standlinie an zwei Punkten schneidet. Einer dieser Schnittpunkte ist dabei der gesuchte Ort. Es gilt also nur noch den richtigen Schnittpunkt zu finden. Im klassischen Standlinienverfahren benutzt man dazu eine iterative Methode.

Ausgangspunkt dafür ist ein angenommener Ort (den man z.B. aus der letzten Schiffposition und einer Näherung für den seitdem zurückgelegten Weg abschätzen kann). Für diesen Ort (in der Nautik wird er als „gegißter Ort“ bezeichnet) berechnet man die Zenitdistanz und den Azimutwinkel der beiden beobachteten Sterne für den Beobachtungszeitpunkt. Im Vergleich zu der beobachteten Zenitdistanz z_b ergibt sich dann für jeden Stern die Differenz

$$\Delta z = z(\tau) - z_b(\tau)$$

Ist diese Differenz negativ, dann muß der wahre Ort weiter vom Zenitort entfernt sein als der geigißte Ort. Ist die Differenz dagegen positiv, dann befindet sich der gesuchte Ort näher am Zenitort als der geigißte Ort. Korrigiert man nun den geigißten Ort mit diesen Differenzwerten, dann erhält man als Schnittpunkt der beiden Standlinien eine neue Position, die dem wahren Ort schon eher entspricht (die Standlinie schneidet dabei immer senkrecht die Azimutlinie, weshalb Letztere auch bestimmt werden muß). Anschließend kann man das Prozedere so oft wiederholen, bis man den wahren Ort in der gewünschten Genauigkeit bestimmt hat. In der Seefahrt wurde dieses Verfahren oftmals graphisch auf einer Seekarte ausgeführt.

Heute ist das alles viel einfacher, genauer und unkomplizierter, vorausgesetzt man hat ein GPS-System zur Verfügung. Die Grundlage für ein *Global Positioning System* sind eine Anzahl von

Satelliten (mindestens vier), welche permanent Zeitsignale und Statussignale aussenden, aus denen ein entsprechender Empfänger die geographischen Koordinaten seines Standortes ableiten kann. Zurzeit sind zwei Systeme im Einsatz, das amerikanische NAVSTAR-System (32 Satelliten) und das russische GLONASS-System (ebenfalls 24 Satelliten). Das Erstere ist mittlerweile frei zugänglich und erreicht Positionsgenauigkeiten von etwa ± 3 Meter. Da es unter militärischer Kontrolle steht, kann deren Präsenz in Krisenzeiten nicht garantiert werden. Deshalb haben sich die Europäer zusammengeschlossen, um bis 2008 ein unter ziviler Kontrolle stehendes GPS-System mit dem Namen GALILEO aufzubauen.

Wie funktioniert das Global Positioning System?

GPS ist ohne Zweifel einer der innovativsten Technologien der letzten Jahrzehnte. Viele Kraftfahrzeuge der Mittel- und Oberklasse sind mittlerweile serienmäßig mit satellitengestützter Navigation ausgestattet, die das Anfahren vorgegebener Orte – z.B. in Großstädten – im Vergleich zu früher stark vereinfachen. Möglich wird das durch eine permanente Ortsbestimmung des Fahrzeuges mit einer Genauigkeit von unter 5 Meter und durch exaktes Kartenmaterial des europäischen und amerikanischen Straßennetzes.

Die Anwendung der Satellitennavigation bei Kraftfahrzeugen ist ziemlich neu. Ursprünglich entstand GPS unter der Ägide des US-amerikanischen Verteidigungsministeriums und war eigentlich für rein militärische Zwecke ausgelegt (für zivile Anwendungen hat man sogar die Genauigkeit stark herabgesetzt). Das Prinzip des GPS besteht in nichts anderem als in Signallaufzeitmessungen zu Satelliten bekannter Position. Da die Lichtgeschwindigkeit sehr genau bekannt ist und man Zeitdifferenzen mit hoher Genauigkeit messen kann, kann man aus der Lichtlaufzeit auf die Entfernung zwischen Sender und Empfänger schließen. Stehen mehrere Satelliten zur Verfügung (im Prinzip 3, wegen Synchronisationsaufgaben sind jedoch 4 erforderlich), läßt sich prinzipiell die Position des Empfängers mit den Methoden der Triangulation bestimmen.

Der erste GPS-Satellit des NAVSTAR-Systems (Navigation Satellite Time And Range) wurde am 27. Juni 1977 in eine ca. 20200 km hohe Umlaufbahn um die Erde gebracht. Ihm folgten bis 1990 23 weitere Satelliten um auf diese Weise eine globale Abdeckung zu erreichen. 1996 waren es bereits 26 operationelle Satelliten, heute sind es 32 (inkl. Reserve), so daß die Verfügbarkeit und Qualität von GPS Messungen im Normalfall überall auf der Welt permanent gewährleistet ist.

Ein GPS-System besteht aus drei wesentlichen Komponenten: den Satelliten, den Empfängern und dem Kontrollsystem. Um eine Position zu bestimmen, muß der Empfänger mindestens 4 Satelliten in „Sichtweite“ haben. Jeder weitere „Sichtkontakt“ erhöht die Qualität der Positionsbestimmung erheblich, insbesondere, weil dann durch präzise Höhenbestimmungen auch eine hohe Genauigkeit in topographisch ungünstigen Gebieten erreicht werden kann. Bei beweglichen Objekten läßt sich sogar die momentane Geschwindigkeit messen.

Die genauen Positionen der einzelnen Satelliten im Erdorbit lassen sich mit den Methoden der Himmelsmechanik sehr genau berechnen so daß man davon ausgehen kann, daß sie zu jedem gegebenen Zeitpunkt mit der notwendigen Genauigkeit bekannt sind. Wenn die von ihnen ausgesandten Signale (die quasi einen Zeitstempel in der Form „ich wurde um soundso viel Uhr abgesetzt“ beinhalten) von einem GPS-Empfänger auf der Erde empfangen werden, haben diese eine unterschiedlich lange Laufzeit, aus denen der Abstand zu den jeweiligen Satelliten bis auf wenige Meter genau abgeleitet werden kann. Simultan dazu erzeugt der Empfänger selbst ein Signal mit der gleichen Kennung und synchronisiert dieses mit den empfangenen Informationen. Voraussetzung dafür ist die genaue zeitliche Gleichschaltung der Satelliten und des Empfängers. Dazu kommen noch z.T. recht komplizierte Korrekturen, welche in die Laufzeitberechnung einfließen (so ist z.B. die Lichtgeschwindigkeit in der Erdatmosphäre etwas geringer als im Vakuum des Weltalls).

Der von einem einzelnen Satelliten ausgesendete Zeitimpuls zeichnet eine Kugelsphäre mit dem Radius $c_0 t$ (c_0 =Lichtgeschwindigkeit) um den Satelliten, auf dessen Oberfläche das Signal jeweils gleichzeitig empfangen werden kann. Wird nun simultan dazu ein Signal eines zweiten Satelliten empfangen, kommt eine zweite kreisförmige Standlinie hinzu, welche die mögliche Position des Empfängers auf zwei gemeinsame Schnittpunkte mit der ersten Standlinie eingrenzt. Eine mathematisch eindeutige Positionsbestimmung kommt schließlich über die Einbindung einer weiteren Standlinie mit definierter Zeitkennung eines dritten Satelliten zustande. Es ist damit offensichtlich, daß die Genauigkeit der Positionsbestimmung in erster Linie von der Genauigkeit der Laufzeit – und damit Entfernungsmessung abhängt und diese wiederum von der Genauigkeit der zur Verfügung stehenden Zeitbasis. Letztere ist durch Atomuhren gegeben, die in den Satelliten installiert und genauestens synchronisiert sind (hier müssen sogar relativistische Effekte mit berücksichtigt werden).

Gemessen wird die Laufzeit durch den Vergleich der momentanen Uhrzeit bei Ausstrahlung des Signals („Zeitstempel“) im Satelliten und bei Empfang durch den GPS-Empfänger. Eine genaue Zeitmessung setzt natürlich voraus, daß die Uhren beim Nutzer und im Satelliten mit hoher Genauigkeit synchron laufen. Wie man leicht nachrechnet, bedeutet bereits eine Zeitdifferenz von lediglich einer $1\mu s$ einen Fehler in der Entfernungsmessung von ca. 300 m. Um die bei der Verwendung weniger genauer Uhren im Empfänger (dort Atomuhren einzubauen ist einfach zu teuer) auftretenden Zeitabweichungen zu eliminieren, ist eine Zeitkorrektur notwendig. Diese Korrektur selbst ist immanenter Bestandteil des Meßvorgangs und wird technisch über einen vierten Satelliten realisiert.

Während für die Bestimmung der drei räumlichen Koordinaten des Empfängers nur drei Entfernungsmessungen notwendig sind, muß zur Ermittlung der Abweichung der Uhrzeit T des Empfängers und zur Eliminierung der dadurch entstehenden Meßfehler eine weitere Entfernungsmessung zu einem vierten Satelliten erfolgen. Der Rest ist reine Rechnerei und kann mit in den Empfängern eingebauten Rechnern mühelos bewältigt werden.

Zeitliche Änderung von Gestirnskoordinaten

Ein prinzipieller Nachteil des Äquatorial- und Ekliptikalsystem ist, daß die Position des Koordinatennullpunkts – also der Frühlingspunkt – aufgrund der Tatsache, daß sich die Erde wie ein Kreisel verhält, zeitlich veränderlich ist. Daraus resultieren Koordinatenänderungen, die nichts mit der Eigenbewegung der Gestirne zu tun haben. Sie ergeben sich vielmehr aus dem komplexen Verhalten der Erde unter der Einwirkung der Gravitation von Sonne, Mond und Planeten. Die Präzession – die bereits um 340 v.u.Z. von dem griechischen Astronomen HIPPARCH (180-120 v.Chr.) entdeckt wurde, liefert den Hauptbeitrag für die Wanderung des Frühlingspunktes auf dem Himmelsäquator. Sie selbst schwankt periodisch mit einer Amplitude von ca. $17''$ um einen Mittelwert, so daß sich die Polachse nicht glatt auf dem Präzessionskegel bewegt, sondern selbst etwas wackelt. Diese der Präzession überlagerten periodischen und nichtperiodischen Schwankungen bezeichnet man als Nutation. Ihr größter Anteil wird durch den Mond verursacht und besitzt eine Periode von 18.6 Jahren.

Die ungleichförmige Verlagerung der Erdachse, die sich in einer Schwankung der Polhöhe äußert, führt zu einer geringen Änderung der Schiefe der Ekliptik. Aus diesem Grund muß bei astrometrischen Rechnungen auch auf die Epoche von ε geachtet werden.

Präzession

Die Koordinatenangaben eines Gestirns im rotierenden Äquatorialsystem beziehen sich immer auf eine feste Epoche, die auch als Äquinoktium bezeichnet wird. Wie bereits erwähnt, führen periodische (und nichtperiodische) Schwankungen der Erdachse – insbesondere die Präzession - zu einer Positionsänderung des Frühlingspunktes, von dem aus die Rektaszension als auch die ekliptikale Länge gezählt wird. Wie wirkt sich nun diese Drift des Frühlingspunktes auf die Äquatorialkoordinaten aus? Um diese Frage zu beantworten, ist zu untersuchen, wie sich der Nullpunkt des Koordinatensystems bei kleinen Änderungen in der ekliptikalen Länge verhält (die Präzession läßt die ekliptikale Breite unverändert, da der Pol der Ekliptik in Richtung der Präzessionsachse zeigt). Man geht dabei am günstigsten von (2.23c) aus und bestimmt die Änderung in δ . Differentiation von (2.23c) nach $d\lambda$ führt auf:

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{\sin \varepsilon \cos \beta \cos \lambda}{\cos \delta} \quad [2.28]$$

Da nach (2.22b) $\cos \lambda \cos \beta = \cos \delta \cos \alpha$ ist, folgt aus (2.28):

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \sin \varepsilon \cos \alpha \quad [2.29]$$

Jetzt ist noch die Änderung in Rektaszension zu berechnen. Ausgangspunkt ist Gleichung (2.22b). Die vollständige Ableitung liefert:

$$-\sin \alpha \cos \delta d\alpha - \cos \alpha \sin \delta d\delta = -\cos \lambda \sin \beta d\beta - \cos \beta \sin \lambda d\lambda \quad [2.30]$$

und da es keinen Zuwachs in ekliptikale Breite gibt, gilt:

$$-\sin \alpha \cos \delta d\alpha - \cos \alpha \sin \delta d\delta = -\cos \beta \sin \lambda d\lambda \quad [2.31]$$

Mit Hilfe von (2.29) kann schließlich $d\delta$ substituiert werden:

$$-\sin \alpha \cos \delta d\alpha = \sin \varepsilon \cos^2 \alpha \sin \delta d\lambda - \cos \beta \sin \lambda d\lambda \quad [2.32]$$

und mit (2.22a):

$$-\sin \alpha \cos \delta d\alpha = \sin \varepsilon \cos^2 \alpha \sin \delta d\lambda - \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha d\lambda \quad [2.33]$$

Nach Vereinfachung und Auflösung nach $d\alpha$ erhält man daraus:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \sin \alpha \sin \varepsilon \tan \delta + \cos \varepsilon \quad [2.34]$$

Bezieht man die durch die Präzession der Erdachse verursachte Änderung in der ekliptikalen Länge auf ein Jahr, dann kann man $d\lambda$ über folgende Proportion abschätzen:

$$d\lambda = \frac{\text{Platonisches Jahr}}{360^\circ}$$

Gewöhnlich setzt man $m = d\lambda \cos \varepsilon$ und $n = d\lambda \sin \varepsilon$, so daß Formeln für die Präzessionskorrektur durch

$$d\alpha = m + n \sin \alpha \tan \delta \quad [2.35]$$

$$d\delta = n \cos \alpha$$

gegeben sind. m und n werden als Präzessionskonstanten bezeichnet. Auch sie bezieht man gewöhnlich auf eine bestimmte Epoche, da sich die Schiefe der Ekliptik über längere Zeiträume langsam ändert. Für das Äquinoktium 2000.0 gilt

$$m=3.07419 \text{ s/Jahr} \quad n=1.33589 \text{ s/Jahr}$$

Nutation

Die Nutation bewirkt eine kleine, im Wesentlichen periodische Schwankung der Erdachse um ihren mittleren Ort auf dem Präzessionskegel (die Erdachse führt eine „Nickbewegung“ aus). Sie setzt sich aus verschiedenen Beiträgen zusammen, von denen der Beitrag, deren Ursache in einer periodischen Verlagerung der Mondbahnebene durch den Einfluß der Sonnengravitation liegt, am größten ist. Er führt zu einer periodischen Abweichung des wahren Frühlingspunktes vom mittleren Frühlingspunkt um ca. $17.2''$, wobei die Periode 18.6 Jahre beträgt. Das vom Mond am Äquatorwulst erzeugte Drehmoment ist am größten, wenn sich der Mond auf seiner Bahn um die Erde genau 90° von seinem aufsteigenden Knoten (das ist der Schnittpunkt der scheinbaren Mondbahn mit dem Himmelsäquator) entfernt befindet und der Knoten mit dem Frühlingspunkt zusammenfällt. Der Mond hat also nicht immer gleich starke Auswirkungen auf die Erde. Seinen minimalsten Einfluß hat er, wenn sein Winkelabstand vom Himmelsäquator am geringsten ist, den Maximalsten, wenn der Winkelabstand am größten ist.

Da die Mondbahn nicht genau in der Ekliptik liegt (die Neigung der Mondbahn beträgt $5^\circ 8.7'$), bewirken die gravitativen Störungen der Sonne eine Drehung der Mondbahnebene derart, daß sich deren Pol einmal in 18.6 Jahren um den Pol der Ekliptik bewegt. Aus diesem Grund hat der größte Nutationsterm auch eine Periode von 18.6 Jahren.

Weitere Terme haben ihre Ursache in der monatlich wechselnden Anziehung des Mondes wegen dessen exzentrischer Bahn um den Schwerpunkt Erde-Mond (führt zu einer halbmonatlichen Periode mit einer Amplitude von rund $0.204''$), im jährlichen Umlauf der Erde um die Sonne (ca. $1.27''$) und in der aufgrund der beide Effekte verursachten Änderung von ε (ca. $0.09''$ bzw. $0.55''$).

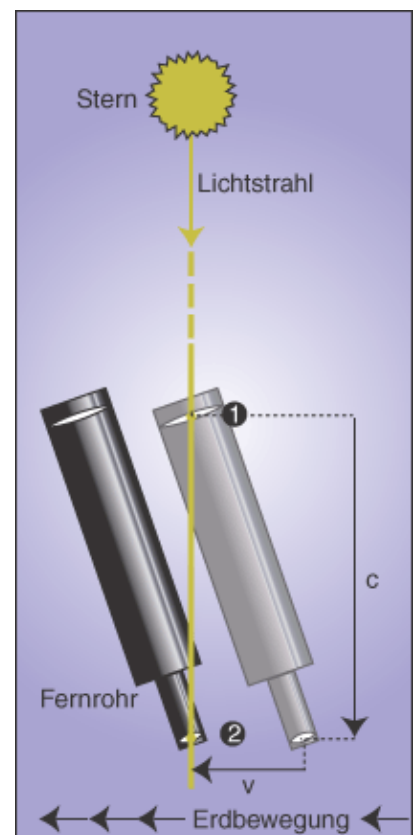
Für exakte astrometrische Messungen und ihre Reduktion auf eine vorgegebene Epoche ist die genaue Kenntnis auch kleinperiodischer Änderungen der Nutation notwendig. Die Bestimmung der einzelnen Anteile der Nutationsterme ist Aufgabe des aus dem internationalen Breitendienst hervorgegangenen IPMS (*International Polar Motion Service*) und der IERS (*International Earth Rotation Service*), die 1987 von der Internationalen Astronomischen Union (IAU) eingerichtet wurde.

Das von der IAU autorisierte Nutationsmodell enthält z.B. 106 Terme zur Beschreibung der Längenänderungen und genauso viele für ε . Einige davon beschreiben die Variation des Trägheitsmoments der Erde durch saisonale Verlagerungen der Luftmassen, Effekte der Gezeitenreibung bis hin zu Schwankungen, die mit Prozessen tief im Erdinneren zu tun haben. Die genaue Bestimmung der Rotationsparameter der Erde ist natürlich nicht nur für die Astronomie interessant. Ohne ihre Kenntnis wäre auch ein weltumspannendes GPS-System zur genauen Ortsbestimmung in der heute erreichten Genauigkeit nicht möglich.

Aberration

Im ersten Drittel des 18. Jahrhunderts bemerkte der englische Astronom JAMES BRADLEY (1692-1762), daß die Fixsterne ihren scheinbaren Ort im Laufe eines Jahres verändern. Sterne, die auf der Ekliptik liegen, bewegen sich auf Geraden hin und her, während polnahe Sterne Kreise an der Himmelskugel beschreiben. Alle anderen Sterne bewegen sich auf Ellipsen, deren kleine Halbachse von der ekliptikalen Breite abhängt. Diese Erscheinung, die als astronomische Aberration bezeichnet wird, hat ihre Ursache in der endlichen Lichtgeschwindigkeit und in der Bewegung der Erde um die Sonne.

Ist v die Geschwindigkeit des Beobachters, c die Lichtgeschwindigkeit und τ die Zeit, die ein Lichtstrahl vom Objektiv des Fernrohrs zum Auge des Beobachters, der durch das Okular blickt, benötigt. Während dieser ohne Zweifel kurzen Zeit bewegt sich aber auch der Beobachter um die Strecke τv weiter. Das führt dazu, daß der Stern nicht genau an der Position erscheint, wo man ihn eigentlich erwartet. Die Abweichung σ in Richtung des Vektors $\mathbf{v}$ (der Punkt an der Himmelskugel in Richtung dieses Vektors nennt man Apex) ergibt sich aus dem Verhältnis $v/c \sin h$, wobei h der Höhenwinkel des Sterns in bezug auf den Apex ist.



Dieser Winkel kann mit der ekliptikalen Breite β des Sterns identifiziert werden, da sich die Erde in der Ebene der Ekliptik um die Sonne bewegt und demnach der Apex auch in der Ekliptik liegen muß.

Für die durch die Erdbewegung um die Sonne hervorgerufene Aberration ergibt sich demnach:

$$\sigma = \frac{v}{c} \sin \beta \quad [2.36]$$

Das Verhältnis v/c wird als Aberrationskonstante bezeichnet. Sie beträgt $20.496''$.

Ein Stern, der sich am Pol der Ekliptik befindet, beschreibt im Laufe eines Jahres einen Kreis mit einem Radius von $20.496''$. Alle anderen Sterne beschreiben dagegen Ellipsen, deren große Achse

weiterhin der Aberrationskonstanten entspricht, deren kleine Achse sich aber entsprechend (2.36) verhält. Auf der Ekliptik entartet also die jährliche Aberration auf eine Hin- und Herbewegung

Die z.B. mit einem Meridiankreis gemessene Position eines Sterns an der Himmelskugel wird seine scheinbare Position genannt. Um die mittlere Position zu erhalten, muß man die Aberration und die Nutation zum Abzug bringen. Anschließend erfolgt die Reduktion auf eine bestimmte Epoche, wobei der Einfluß der Präzession eliminiert wird. Erst dann kann man so diffizile Parameter wie die Eigenbewegung und die jährliche Parallaxe aus den Positionsmessungen extrahieren. Bringt man schließlich auch noch die jährliche Parallaxe zum Abzug, dann erhält man aus den geozentrischen Positionen heliozentrische Positionen.

Refraktion

Eine weitere, von der Zenitdistanz abhängige Positionsverschiebung ist die Refraktion. In der Optik versteht man darunter die Änderung der Ausbreitungsrichtung von Lichtwellen an der Grenzfläche von Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes. In der Astronomie wird dagegen die Ablenkung des Sternlichts bei ihrem schrägen Durchgang durch unterschiedlich dichte Atmosphärenschichten als Refraktion bezeichnet. Der physikalische Effekt ist der Gleiche. Mit der Gasdichte in der Atmosphäre ändert sich auch das Brechungsverhalten derart, daß je größer die Gasdichte ist, umso mehr ein Lichtstrahl zur Senkrechten hin gekrümmt wird. Der Stern erscheint gegenüber seiner wahren Position in Richtung Zenit „angehoben“ und zwar umso stärker, je weiter er sich dem Horizont nähert.

Der Brechungsindex der Luft auf Meeresspiegelniveau beträgt etwa $n_0 = 1.0003$, der im Vakuum des Weltraums $n=1$. Da auch in der Erdatmosphäre das Brechungsgesetz

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha' \quad [2.37]$$

gilt, wobei n , α und n' , α' die Brechungsindizes und den Ablenkwinkel eines Lichtstrahls für zwei aufeinanderfolgende Atmosphärenschichten bezeichnen, kann man auch schreiben:

$$n' = n - dn \quad [2.38]$$

$$\alpha' = \alpha - dz$$

wobei dn und dz die infinitesimalen Änderungen des Brechungsindex und der Zenitdistanz z beim Übergang zu immer dichteren Atmosphärenschichten beschreiben.

Aus

$$n \sin \alpha = (n - dn) \sin(\alpha - dz) \quad [2.39]$$

erhält man

$$n \sin \alpha = n \sin \alpha - dn \sin \alpha + n \cos \alpha dz$$

also

$$dz = \frac{dn}{n} \tan \alpha \quad [2.40]$$

Integration von $n=1$ bis n_0 liefert

$$z = \ln n_0 \tan \alpha = R \tan \alpha \quad [2.41]$$

Mit $n_0=1.000293$ ergibt sich R zu rund $60''$. Beobachtungen ergeben in Übereinstimmung damit einen mittleren Wert von $R=58.2''$. Bei genauen Positionsmessungen muß beachtet werden, daß n_0 druck- und temperaturabhängig ist. Gibt man den Luftdruck in hPa und T in Grad Kelvin an, dann kann man n_0 über folgende Näherungsformel berechnen, wobei n_s der Brechungsindex unter Normalbedingungen darstellt ($n_s=1.0002944$ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 500 \text{ nm}$, $T=273 \text{ K}$ ($= 0^\circ \text{ C}$) und $p=1013 \text{ hPa}$):

$$n_0 = 1 + \frac{(n_s - 1) p T}{276549} \quad p \text{ in [hPa], } T \text{ in [K]} \quad [2.42]$$

Die Refraktion ist eine sehr komplexe Erscheinung, die sich formelmäßig kaum in geschlossener Form angeben läßt, d.h. sie hängt stark von den nicht immer bekannten Gegebenheiten der Erdatmosphäre am Beobachtungsort ab. Besonders für Zenitdistanzen größer 80° kann die Refraktion oftmals nur noch sehr ungenau angegeben werden, da die in der Ableitung von Gleichung (2.42) vorausgesetzte gleichmäßige Schichtung der Atmosphäre aufgrund der Erdkrümmung nicht mehr gegeben ist.

Horizontalparallaxe

Wenn zwei Beobachter zur gleichen Zeit an zwei möglichst weit voneinander entfernten Orten die Position des Planeten Mars relativ zu den Umgebungssternen bestimmen, dann stellen sie eine kleine Differenz in den gemessenen Koordinaten fest. Die Ursache dafür ist ein wohlbekannter Effekt, der als Parallaxe bezeichnet wird. Der Abstand der Beobachter bildet die Basislänge D . Die Ortsverschiebung an der Himmelskugel ist gleich dem Winkel p , unter dem vom Gestirn (hier Mars) aus gesehen die Basislänge D erscheint. Für diesen Winkel (in Bogensekunden) gilt dann die Beziehung:

$$p = \frac{D \cdot 206264.8}{r} \quad [2.43]$$

(Die Zahl 206264.8 ergibt sich aus der Anzahl der Bogensekunden im Vollkreis, dividiert durch 2π)

Eine Ortsveränderung in bezug auf ein Gestirn ergibt sich für einen Beobachter auch im Laufe eines Tages aufgrund der Erdrotation. Die daraus resultierende periodische Positionsverschiebung an der Himmelskugel wird deshalb auch tägliche Parallaxe genannt. Da die Basislänge maximal dem

Äquatordurchmesser der Erde entspricht, hat sie lediglich für Objekte im Sonnensystem einen meßbaren Wert. Sie ist immer dann am größten, wenn sich der Himmelskörper gerade am Horizont befindet. Ist R der Erdradius und r die Entfernung des Himmelskörpers vom Erdmittelpunkt M , dann ergibt sich die Horizontalparallaxe in Bogensekunden zu

$$p_h = \frac{R \cdot 206264.8}{r} \quad [2.44]$$

Für die Sonne beträgt sie $8.794''$.

Ist z die topozentrische Zenitdistanz eines Himmelskörpers und z' seine geozentrische Zenitdistanz zum gleichen Zeitpunkt, dann kann man für die Parallaxe auch schreiben:

$$p = z' - z$$

oder unter der Berücksichtigung, daß sich aufgrund der Erdrotation die Zenitdistanz ständig ändert:

$$p' = p \sin z'$$

Hieraus erkennt man, daß p' seinen größten Wert hat, wenn $z'=90^\circ$ ist, sich das Gestirn also genau am Horizont befindet.

Jährliche Parallaxe

Im Jahre 1840 gelang es FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846) aus umfangreichen Positionsmessungen des Sterns 61 Cygni mit Hilfe eines Heliometers die erste Fixsternparallaxe abzuleiten. Dabei handelt es sich um die scheinbare Verschiebung eines Sterns an der Himmelskugel aufgrund der Änderung des Blickwinkels zu diesem Stern bei der Bewegung der Erde um die Sonne innerhalb eines Jahres. Oder anders ausgedrückt, die jährliche Parallaxe eines Sterns ist der Winkel, unter dem der mittlere Erdbahnradius (= 1 Astronomische Einheit, AU) von diesem Stern aus erscheint. Aus der Parallaxe läßt sich die Entfernung r zu einem Stern leicht in Astronomische Einheiten bestimmen:

$$\sin p_a = \frac{1}{r} \quad [2.45]$$

oder, da der Winkel p_a außerordentlich klein ist ($<1''$)

$$p_a = \frac{206264.8}{r}, \text{ wenn } p_a \text{ in Bogensekunden gemessen wird.} \quad [2.46]$$

In der Astronomie wird die Entfernung eines Objekts, von dem aus 1 AU unter einem Winkel von $1''$ erscheint, als Parallaxensekunde oder Parsek – abgekürzt pc – bezeichnet. Dieses Entfernungsmaß hat die anschauliche Entfernungsangabe in Lichtjahren weitgehend verdrängt.

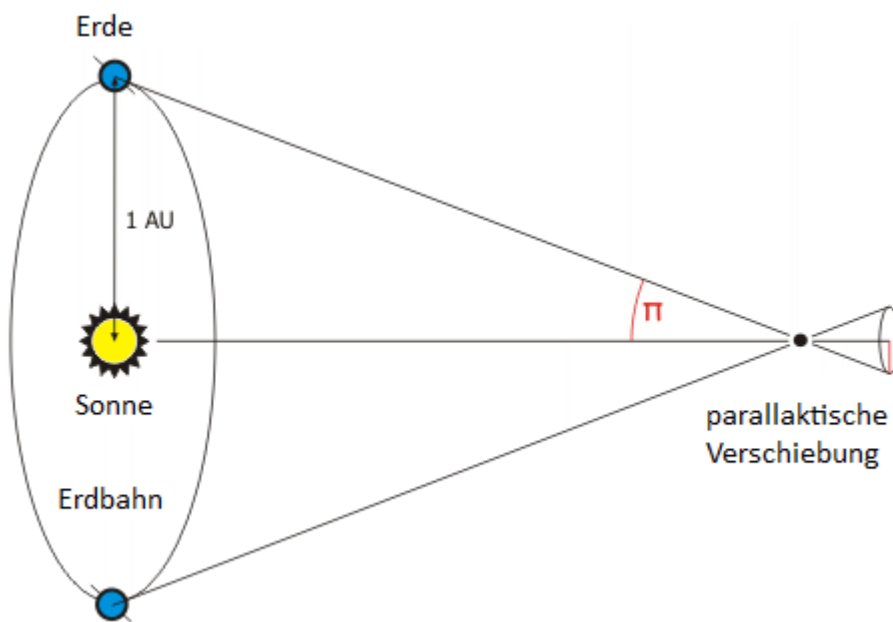
Aus (2.46) ergibt sich für 1 pc:

$$1 \text{ pc} = 206265 \text{ AU} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3.26 \text{ Lj}$$

so daß man die Entfernung r in pc leicht aus folgender Faustformel berechnen kann:

$$r = \frac{1}{p_a} \quad [2.47]$$

Die trigonometrische Parallaxe ist eine der wichtigsten Methoden der Entfernungsbestimmung im Kosmos. Leider ist sie nur für relativ nahe Sterne anwendbar. Erst der Einsatz von astrometrischen Satelliten wie Hipparcos hat den räumlichen Abstand um die Sonne, der trigonometrisch vermessen werden kann, um den Faktor 10 erweitert.



Entstehung der jährlichen parallaktischen Verschiebung eines Sterns, der senkrecht über der Erdbahnebene (am „Pol der Ekliptik“) steht

Entfernungsmaßstäbe im Kosmos

Parsek	Lichtjahr	AU	km
1.0000	3.26	206265	$30.86 \cdot 10^{12}$
0.3066	1.00	63240	$9.46 \cdot 10^{12}$
		1	$150.00 \cdot 10^6$

Eigenbewegung der Sterne

Man bezeichnet die Sterne im Gegensatz zu den Planeten – den „Wandelsternen“ – oft als „Fixsterne“, weil sie offensichtlich ihre Position untereinander am Himmel nicht ändern, also an der Himmelskugel „fixiert“ sind. Erst 1718 bemerkte der englische Astronom EDMUND HALLEY (1656-1742), daß die Fixsterne gar nicht so fest am Himmel stehen, wie man bis dahin geglaubt hatte. Aus dem Vergleich von Sternpositionen mit solchen aus antiken Sternkatalogen stellte er fest, daß sich die Sterne – wenn auch sehr langsam – am Himmel bewegen. Sie haben eine Eigenbewegung. Das bedeutet, daß sich in der Größenordnung von Zehntausenden Jahren das Aussehen uns bekannter Sternbilder völlig verändern kann. Der Stern mit der größten bekannten Eigenbewegung befindet sich im Sternbild Schlangenträger und bewegt sich pro Jahr um $10.34''$. Er wurde 1916 auf einer Fotoplatte von dem amerikanischen Astronomen EDWARD BARNARD (1857-1923) entdeckt und heißt seitdem Barnards Pfeilstern. Er ist wegen seiner geringen Helligkeit von $9^m 54$ mit dem freien Auge nicht zu sehen.

Die Eigenbewegung eines Sterns sagt noch nichts über dessen wahren Bewegungszustand im Raum aus, da sie nur die Bewegungskomponente senkrecht zur Blickrichtung angibt. Bezeichnet μ die jährliche Eigenbewegung (in rad) und r die Entfernung von der Sonne, dann ergibt sich für die jährliche Verschiebung x an der Himmelskugel:

$$x = \mu r \quad [2.48]$$

oder wenn r durch die jährliche Parallaxe p_a ersetzt und wie μ in Bogensekunden gemessen wird:

$$x = \frac{\mu}{p_a} \quad [\text{AU}] \quad [2.49]$$

Die tangentielle Geschwindigkeitskomponente V_t berechnet sich mit $1 \text{ AU} = 1.496 \cdot 10^8 \text{ km}$ und der Länge eines Jahres $t_{\text{jahr}} = 3.16 \cdot 10^7 \text{ s}$ daraus zu

$$V_t = 4.7342 \frac{\mu}{p_a} \quad [\text{km/sec}] \quad [2.50]$$

Um die wahre Geschwindigkeit eines Sterns im Raum zu bestimmen, benötigt man noch die Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung. Diese Komponente (V_r) wird als Radialgeschwindigkeit bezeichnet und kann unter Ausnutzung des Dopplereffekts spektroskopisch gemessen werden. Der Rest ist etwas Vektorrechnung. Für den Betrag der „wahren“ Raumgeschwindigkeit ergibt sich dann

$$V = \sqrt{V_t^2 + V_r^2} \quad [2.51]$$

Der Dopplereffekt besagt, daß es zu einer Frequenzverschiebung einer Wellenstrahlung kommt, wenn sich Strahlungsquelle und Beobachter relativ zueinander bewegen. Ist diese Geschwindigkeit klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c , dann gilt

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{V_r}{c} \quad [2.52]$$

wobei λ_0 die Laborwellenlänge und λ die gemessene Wellenlänge des Sternlichts bedeutet. Eine Verschiebung zu längeren Wellenlängen hin bezeichnet man gewöhnlich als Rotverschiebung: Die Lichtquelle entfernt sich vom Beobachter. Eine Lichtquelle, die sich auf einen Beobachter zu bewegt, verrät sich dagegen durch eine Blauverschiebung.

Mit modernen spektroskopischen Methoden können standardmäßig Radialgeschwindigkeiten mit einer Genauigkeit von ungefähr $\pm 10 \text{ m/s}$ gemessen werden. Man verwendet dazu hochauflösende Gitterspektrographen, mit deren Hilfe das Sternlicht zu einem Spektrum auseinandergezogen wird. In dem man die genaue Wellenlänge bekannter Spektrallinien in einem derartigen Spektrum ausmisst und mit der bekannten Laborwellenlänge vergleicht, kann man $\Delta \lambda$ bestimmen. Für die Radialgeschwindigkeitskomponente gilt dann:

$$V_r = \frac{c \Delta \lambda}{\lambda_0} \quad [2.53]$$

Die Radialgeschwindigkeit ist negativ, wenn sich die Quelle auf den Beobachter zu bewegt (Blauverschiebung).

Der aus der Eigenbewegung und der Radialgeschwindigkeit ermittelte Geschwindigkeitsvektor naher Sterne ist jedoch durch die Eigenbewegung der Sonne verfälscht. Gerade für die Erforschung der Dynamik der Milchstraße ist es aber wichtig zu wissen, wo sich unser Sonnensystem derzeit befindet und wie die wahre Raumbewegung der Sterne in der Sonnenumgebung in bezug auf das Milchstraßensystem ist. Es besteht somit die Aufgabe, den Einfluß der Eigenbewegung der Sonne aus der Eigenbewegung der untersuchten Sterne zu eliminieren. Ziel ist es, ihre Pekuliarbewegung zu bestimmen.

Local Standard of Rest

Die Sonnenbewegung äußert sich in einem systematischen Effekt derart, daß die über viele Sterne (genauer, sonnennahe Sterne, $r < 80 \text{ pc} \approx 0.2\%$ des Durchmessers der galaktischen Scheibe) gemittelte Eigenbewegung in Richtung (Apex) und entgegen der Sonnenbewegung (Antapex) im Mittel verschwindet. Der Betrag der Radialgeschwindigkeit erreicht dagegen in Richtung Apex (Blauverschiebung) und in Richtung Antapex (Rotverschiebung) im Mittel sein Maximum. Um diesen Effekt genauer zu untersuchen, führt man einen räumlichen Bereich mit der Sonne als Mittelpunkt ein, der sich in einer idealen Kreisbahn um das Milchstraßenzentrum bewegt. Dieser Bereich wird als LSR (*local standard of rest*, Lokales Ruhesystem) bezeichnet, auf das die Geschwindigkeiten der darin enthaltenen Sterne (inkl. der Sonne, die Sonne bewegt sich relativ zu diesem System mit der Geschwindigkeit V_s) bezogen werden. Die Annahme ist, daß sich in diesem System die Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Sterne in Richtung des galaktischen Zentrums (u) und senkrecht dazu (w), d.h. in Richtung des galaktischen Pols, im Mittel aufheben. Das gilt natürlich nur angenähert, da das Milchstraßensystem nicht genau axialsymmetrisch ist.

Bezeichnet N die Gesamtzahl der Sterne im LSR und (u_i, v_i, w_i) die Geschwindigkeitskomponenten des i -ten Sterns, dann gilt:

$$\langle u_{pec} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \approx 0 \quad [2.54]$$

$$\langle w_{pec} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \approx 0 \quad [2.55]$$

Die mittlere v -Komponente $\langle v_{pec} \rangle$ würde nur dann verschwinden, wenn alle Sternbahnen um das galaktische Zentrum exakte Kreisbahnen wären. Das ist aber nicht der Fall, so daß

$$\mathbf{V}_{pec} = \begin{pmatrix} \langle u_{pec} \rangle = 0 \\ \langle v_{pec} \rangle \neq 0 \\ \langle w_{pec} \rangle = 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad [2.56]$$

gilt.

Wenn man den Vektor $\mathbf{V}_s$ kennt, kann man alle Geschwindigkeitsmessungen relativ zum LSR umrechnen und somit die Pekuliargeschwindigkeiten bestimmen:

$$\mathbf{V}_{pec} = \mathbf{V}_s + \mathbf{V} , \quad [2.57]$$

und damit auch die Geschwindigkeit der Sonne relativ zum LSR

$$\mathbf{V}_s = \begin{pmatrix} \langle u_{pec} \rangle - \langle u \rangle \\ -K \langle u_{pec}^2 \rangle - \langle v \rangle \\ \langle w_{pec} \rangle - \langle w \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\langle u \rangle \\ -K \langle u_{pec}^2 \rangle - \langle v \rangle \\ -\langle w \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad [2.58]$$

wobei $\mathbf{V}$ der direkt gemessene Geschwindigkeitsvektor ist. Die Identität $\langle v_{pec} \rangle = -K \langle u^2 \rangle$ folgt aus der Stellarstatistik mit K als positiven konstanten Wert.

Aus diesen Überlegungen läßt sich ein Verfahren ableiten, um die Sonnengeschwindigkeit relativ zum LSR sowie die Äquatorialkoordinaten des Sonnenapex näherungsweise zu bestimmen.

$\langle u_s \rangle$ und $\langle w_s \rangle$ erhält man einfach durch Mittelung der entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten sonnennaher Sterne. K und $\langle v_s \rangle$ läßt sich über einen linearen Ausgleich berechnen, in dem man $\langle v \rangle$ gegen $\langle u_{pec}^2 \rangle$ aufträgt.

Aus derartigen Untersuchungen hat man für $\vec{V}_s$ folgende Geschwindigkeitskomponenten erhalten:

$$\mathbf{V}_s = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad [\text{km/sec}]$$

Um die Position des Sonnenapex zu bestimmen, teilt man die Himmelskugel in einzelne Zonen ein (und zwar in Streifen in Rektaszension als auch in Deklination) und bestimmt darin für eine signifikante Anzahl von Sternen größerer Parallaxe (z.B. $p_a \geq 0.01''$) die Eigenbewegung in bezug zur Sonne.

Die Differenz

Anzahl Sterne mit positiver Eigenbewegung – Anzahl Sterne mit negativer Eigenbewegung

wird in der Zone in Richtung des Apex bzw. Antiapex ungefähr Null.

Die Apexgeschwindigkeit der Sonne ist die Geschwindigkeit der Sonne in bezug auf seine Umgebung und hat nichts mit der Rotationsgeschwindigkeit des LSR um das galaktische Zentrum zu tun. Während sich die Sonne im LRS in Richtung des Sternbild Herkules bewegt, bewegt sich das LSR selbst mit ungefähr 240 km/s in Richtung des Sternbild Cygnus (Schwan).

Dem aus Hannover stammenden Astronomen FRIEDRICH WILHELM HERSCHEL (1738-1822) gelang es 1783 als Erster die Pekuliarbewegung aus der Eigenbewegung von 13 hellen Sternen abzuleiten. Heute, wo weitaus mehr Beobachtungsmaterial vorliegt (allein Hipparcos fand rund 8000 Sterne innerhalb einer Entfernung von 80 pc, deren Parallaxen und Eigenbewegungen nunmehr sehr genau bekannt sind), läßt sich daraus sehr viel Interessantes über den Aufbau und die Dynamik der galaktischen Scheibe in der Sonnenumgebung lernen.

Statistische Parallaxen

Um die mittlere absolute Helligkeit M von physikalisch ähnlichen Sternen (z.B. Sterne gleicher Spektralklasse) zu bestimmen, kann man die Methode der statistischen Parallaxen anwenden. Das Prinzip besteht darin, daß man die Eigenbewegung der Sonne – gegeben durch die Geschwindigkeit $v_\odot$ – von der Geschwindigkeit des Sterns v^* subtrahiert. Als Ergebnis erhält man die Relativgeschwindigkeit, die sich wiederum in eine radiale und eine tangentielle Komponente zerlegen läßt.

Bezüglich des lokalen Bezugsrahmens gilt dann für die Radialgeschwindigkeit:

$$v_r^* = v_r + v_\odot \cos \lambda \quad (\lambda \text{ ist der Winkel zwischen den Vektoren } \mathbf{v}_\odot \text{ und } \mathbf{v}_r^*) \quad [2.59]$$

Diese Komponente läßt sich mit Hilfe des Dopplereffekts sehr leicht spektroskopisch bestimmen. Schwieriger ist es, einen Wert für die Tangentialgeschwindigkeit zu ermitteln. Hier hilft es weiter, wenn man v_r^* für sehr viele Sterne einer Klasse bestimmt und man von der heuristisch

gerechtfertigten Annahme ausgeht, daß im Mittel $\langle v_r^* \rangle \approx \langle v_t^* \rangle$ gilt (die Klammern bedeuten Mittelwerte). Bezeichnet $\langle \mu \rangle$ den Mittelwert der Eigenbewegung dieser Sternklasse in Bogensekunden/Jahr, dann kann man für die Parallaxe (in Bogensekunden) folgende Beziehung ableiten:

$$\langle P \rangle = 4.74 \frac{\langle \mu \rangle}{v_r + v_\odot \cos \lambda} \quad [2.60]$$

Die Mittelwerte der einzelnen Größen versucht man zuvor für eine Anzahl von Sternen abzuleiten, die offensichtlich alle zumindest ungefähr den gleichen Abstand von der Sonne haben. Dieses Verfahren läßt sich mit Erfolg nur dann verwenden, wenn die Annahme zutrifft, daß die Geschwindigkeitsverteilung der in die Beobachtung einbezogenen Sterne unabhängig von der Entfernung ist. Für $r > 200$ pc ist dies aufgrund der differentiellen galaktischen Rotation schon nicht mehr gegeben. Andernfalls kann man aber bei einem vorgegebenen Rotationsgesetz der Milchstraße die Methodik zur Bestimmung von sogenannten Rotationsparallaxen ausnutzen.

Fundamentalsysteme

Die Festlegung eines einem Inertialsystem möglichst nahekommenden, an der Himmelskugel fest verankertes Koordinatensystems (raumfestes Koordinatensystem), ist die Aufgabe der Fundamentalastronomie. Dabei versteht man unter einem Inertialsystem (von lat. *inertia*, Trägheit) ein Koordinatensystem, in dem die Axiome der Newtonschen Mechanik uneingeschränkt gültig sind. Ein solches System ist dadurch ausgezeichnet, daß es im Newtonschen absoluten Raum ruht oder sich relativ dazu gleichförmig (d.h. unbeschleunigt) bewegt. In solch einem System sind Trägheitskräfte ausschließlich der (trägen) Masse und der Beschleunigung proportional. Es treten also keine Scheinkräfte auf, wie man sie z.B. in rotierenden Bezugssystemen (Beispiel: Corioliskraft) beobachtet.

Die Frage ist, was den „absoluten“ Raum repräsentieren soll. Definiert man ein Fundamentalsystem z.B. über hellere Sterne unserer Galaxie, dann handelt es sich genau genommen um kein Inertialsystem im engeren Sinn, da die Bezugssterne (Fundamentalsterne) mit dem Milchstraßensystem mitrotieren und dabei (wenn auch kleine) Beschleunigungen auftreten. Verwendet man dagegen Feldgalaxien oder weit entfernte Quasare, deren tangentielle Eigenbewegungskomponenten auf der Himmelskugel aufgrund der großen Entfernungen vernachlässigbar sind und deren Positionen sich durch radiointerferometrische Methoden sehr genau bestimmen lassen, dann erhält man ein Bezugssystem, daß einem Inertialsystem zumindest sehr nahe kommt.

Der Koordinatennullpunkt eines solchen Systems sollte der Massenschwerpunkt des Weltalls sein. Diese Forderung ist praktisch natürlich nicht realisierbar, so daß man aus praktischen Erwägungen den Masseschwerpunkt (Baryzentrum) des Sonnensystems als Koordinatenursprung wählt. Die Ausrichtung der Koordinatenachsen orientiert sich dagegen an der Lage der Rotationsachse der Erde im Raum. Ein astronomisches Fundamentalsystem ist damit ein spezielles Äquatorialsystem. Da es im „Raum“ – also relativ zu den weit entfernten Objekten im Kosmos, oder schlicht „relativ zum

Sternenhimmel“ ruht, bezeichnet man es auch als „raumfestes Koordinatensystem“ oder „Quasi-Inertialsystem“.

Da die Erde in diesem raumfesten Koordinatensystem rotiert, müssen Transformationsformeln gefunden werden, die es für jeden Ort auf der Erde und für jeden Zeitpunkt erlauben, Gestirnskoordinaten auch in einem „erdfesten“ (z.B. topozentrischen) Koordinatensystem anzugeben. Aufgrund der periodischen und säkularen Änderungen der Lage der Erdachse im Raum und der Winkelgeschwindigkeit der Erde, sind die topozentrischen Örter ständigen Änderungen unterworfen, die mit den wahren Veränderungen, z.B. der Eigenbewegung der Sterne, nichts zu tun haben. Es besteht also die Aufgabe, diese Änderungen mit möglichst hoher Genauigkeit zu bestimmen, um letztendlich ein Koordinatensystem zu erhalten, das weitgehend von diesen Effekten befreit ist. Man erreicht dies, in dem man das Koordinatensystem auf der Himmelskugel durch eine große Anzahl von sogenannten Fundamentalsternen definiert, deren Positionen mit höchstmöglicher Genauigkeit absolut, also nicht durch Anschluß an Sterne bekannter Koordinaten, bestimmt werden. Absolute Positionen sind Positionen, wie man sie z.B. aus Durchgangsmessungen mit Hilfe eines Meridiankreises erhält. Indem man durch aufwendige Meßreihen die Instrumentenfehler bestimmt und zum Abzug bringt und in dem man die gemessenen scheinbaren Örter durch Nutation-, Aberrations- und Refraktionskorrekturen auf ihre absoluten Positionen reduziert, erhält man äußerst genaue Sternpositionen, die in speziellen Katalogen, den Fundamentalkatalogen, veröffentlicht werden. Ein solcher Katalog enthält Koordinatenangaben von ca. 1000 bis 5000 genau vermessener, relativ heller Sterne (bis ca. 9.5^m) für eine bestimmte Epoche, die möglichst gleichmäßig den Himmel abdecken. Der erste derartige Fundamentalkatalog wurde zwischen 1879 und 1883 von dem deutschen Astronomen ARTHUR JULIUS AUWERS (1838-1915) veröffentlicht. Seit dieser Zeit hat man vielfältige Anstrengungen sowohl beobachterischer als auch instrumenteller Art unternommen, um die Genauigkeit der Ortsangaben weiter zu erhöhen. Z.Z. ist der vom Heidelberger Astronomischen Recheninstitut herausgegebene FK5 aktuell und am FK6 (im Zusammenhang mit der äußerst erfolgreichen Hipparcos-Mission) wird gearbeitet.

Der FK5 repräsentiert gegenwärtig das in der Astronomie und Geodäsie zugrunde gelegte raumfeste Koordinatensystem. Er wurde 1988 eingeführt und bezieht sich auf das Äquinoktium 2000.0, also auf den Anfang des Julianischen Jahres 2000. Der Hauptteil enthält die Koordinaten und Eigenbewegungen von 1535 Sternen mit einer Genauigkeit zwischen $0.02''$ bis $0.06''$. Ein Supplement mit weiteren ca. 5000 Sternen wurde etwas später herausgegeben. Das FK5-System beschreibt ein mittleres Äquatorialsystem, bei dem die x - und y -Achse in der Äquatorebene liegen und die z -Achse zum mittleren Himmelspol weist. Die x -Achse zeigt dabei in Richtung des sog. mittleren (dynamischen) Frühlingspunktes. Das Koordinatensystem ist gegen das mittlere Ekliptikalsystem um die Schiefe der Ekliptik ε geneigt. Das bedeutet, daß die x -Achsen der beiden Systeme zusammenfallen. Die Festlegung einer Sternposition erfolgt mittels sphärischer Polarkoordinaten (Rektaszension α , Deklination δ). Diese Koordinaten, aber auch die Eigenbewegungen der Sterne und eine Fülle anderer Größen (insbesondere Fehlerangaben) sind im FK5 enthalten.

Sehr große Bedeutung in der Positionsastonomie und Geodäsie haben die Koordinatensysteme (Bezugsrahmen) des internationalen Erdrotationsdienstes, abgekürzt IERS - *International Earth*

Rotation Service. Sie werden als ITRF (*IERS Terrestrial Reference Frame*) und als ICRF (*IERS Celestial Reference Frame*) bezeichnet. Das Letztere wurde aus Radiobeobachtungen (VLBI, siehe 4.4.2.2) von 608 Radioquellen – hauptsächlich weit entfernter Quasare ohne merkliche Eigenbewegung - abgeleitet. Die Genauigkeit der Koordinaten wird mit $0.0001''$ angegeben. Ansonsten stimmt es im Rahmen der Meßgenauigkeit mit dem FK5-Äquatorialsystem überein (dieses bildet ein raumfestes Bezugssystem mit dem Namen CIS (*Conventional Inertial System*)).

Das ITRF ist dagegen ein spezielles geozentrisches Koordinatensystem. Es wird durch die mittlere Rotationsachse der Erde und die dadurch festgelegte Äquatorebene bestimmt. Die Längenzählung erfolgt *per definitionem* ab der astronomischen Meridianebene von Greenwich. In diesem Koordinatensystem kann die Position auf der Erde durch drei Koordinaten eindeutig festgelegt werden. Diese Koordinaten sind die geographische Breite φ_p , die geographische Länge λ_p und der Wert des Schwerepotentials W_p . Das Schwerepotential hängt vom Gravitationsfeld der Erde ab und enthält implizit Angaben über die Masseverteilung im Erdinneren.

Einen Bezug vom ITRF auf das ICRF kann man über die Ermittlung aller Parameter, welche die Bewegung der Erde im Raum beschreiben, herstellen. Diese Parameter werden über aufwendige Messungen und unter Verwendung spezifischer Modelle, z.B. für Präzession und Nutation bestimmt. Die IERS veröffentlicht die aktuellen Werte in Form von Zeitreihen wöchentlich und monatlich. Das ist notwendig, um z.B. so wichtige Positionsbestimmungssysteme wie GPS (*Global Positioning System*) aufrechtzuerhalten.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß das ITRF jedes Jahr neu ausgeglichen wird, um die Positionsgenauigkeiten den beobachtungstechnischen (und mathematischen) Fortschritt anzupassen. Aus diesem Grund tragen die Bezugsrahmen eine Erweiterung, die das Bezugsjahr angeben, z.B. ITRF99 für das Jahr 1999.

Für die Astronomie hat das durch die FK5-Örter definierte Bezugssystem CIS eine besondere Bedeutung, weil alle anderen Objektkoordinaten (also von Planeten, Asteroiden, Sterne etc.) durch differentiellen Anschluß an diese FK-Sterne, z.B. durch Ausmessen von Fotoplatten, bestimmt werden.

Sternkataloge und Sternatlanten

Sternkataloge sind ein unentbehrliches Arbeitsmittel für den Astronomen. Sie enthalten in erster Linie Koordinaten- und Helligkeitsangaben von Sternen für eine gegebene Epoche, wobei eine gewisse Vollständigkeit bis zu einer bestimmten Grenzhelligkeit angestrebt wird. Derartige Kataloge werden häufig als Durchmusterungen bezeichnet. In ihnen sind neben den Sternpositionen und Helligkeiten oftmals noch weitere Kenngrößen wie Parallaxe, Radialgeschwindigkeit, Eigenbewegung und Spektraltyp erfaßt.

Einer der am häufigsten benutzten Sternkataloge war der Katalog des *Smithonian Astrophysical Observatory*, kurz SAO-Katalog genannt. Er entstand in den 60-iger Jahren und enthält die Positionen und Eigenbewegungen von genau 258997 Sternen, die über die gesamte Himmelskugel verteilt sind. Da oftmals nur Sternkoordinaten aus älteren Katalogen übernommen wurden, deren

Koordinaten man einfach auf die Epoche 1950.0 umgerechnet hat, ist seine Genauigkeit nicht besonders hoch. In einzelnen südlichen Deklinationsbereichen werden sogar Positionsungenauigkeiten bis zu $10''$ hingenommen, während man am nördlichen Sternhimmel immerhin eine Genauigkeit von $1.2''$ erreicht.

Jeder Stern im SAO-Katalog hat eine bestimmte Nummer, über die er identifiziert werden kann. Der Polarstern ist z.B. identisch mit SAO 308 und der hellste Stern im Sternbild Bootis (Bärenhüter), Arktur, hat die SAO-Nummer 100944.

Von 1989 bis 1992 hat das Astronomische Recheninstitut in Heidelberg einen verbesserten und modernisierten Nachfolger für den schon in die Jahre gekommenen SAO-Katalog herausgegeben, den PPM = „*Position and Proper Motion*“ – Katalog. Er besteht aus einem nördlichen und aus einem südlichen Teil und enthält insgesamt 378910 Sterne. Die Sternpositionen sind an den FK5 angeschlossen, was zu einer beträchtlichen Erhöhung der Positionsgenauigkeit führt. Für den Nordhimmel wird eine Genauigkeit von $0.3''$ und für den Südhimmel eine Genauigkeit von $0.16''$ angegeben. Die Epoche entspricht der des FK5, also 2000.0. Für photometrische Aufgabenstellungen ist dieser Katalog weniger gut geeignet, da die Helligkeitsangaben insbesondere für schwächere Sterne nicht besonders genau sind.

Der heute – auch in Amateurräumen – wohl bekannteste Sternkatalog ist der „*Space Telescope Guide Star Catalogue*“, abgekürzt GSC. Er enthält rund 16 Millionen Objekte bis zur 16. Größenklasse (sein Nachfolger, der GSC-2 soll sogar bis zu 500 Millionen Objekte enthalten), die man aus der Vermessung der P.O.O.S. (*Palomar Observatory Sky Survey*)-Platten des Mt.Palomar-Schmidtspiegels (Nordhimmel) und des „*deep blue-light survey*“ des UK-Schmidt-Teleskops in Australien (Südhimmel) erhalten hat. Für astrometrische Zwecke ist er weniger geeignet, einmal wegen der aus der Technologie der Herstellung unvermeidlichen Fehler (viele nichtstellare Objekte wie Galaxien und Quasare werden als „Sterne“ geführt) und zum anderen aufgrund photometrischer Unzulänglichkeiten.

Da der GSC jedoch in erster Linie zur Ausrichtung des Hubble-Teleskops verwendet werden sollte, störte man sich an diesen Unzulänglichkeiten zunächst nicht. In Ermangelung ähnlich weitreichender Kataloge erlangte er jedoch sowohl bei Profi- als auch bei Amateurastronomen sehr schnell eine große Beliebtheit, besonders weil sein Datenbestand über das Internet erhältlich ist (der GSC 1.1 ist auch auf CD-ROM verfügbar).

Ein überaus anspruchsvolles Projekt ist der „*Digitized Sky Survey*“ (DSS), den man als Nachfolger des GSC betrachten kann. Auch er beruht auf gescannten Schmidtplatten sowohl des Mt.Palomar- als auch des UK-Schmidtspiegels. Er liegt in mehreren Farbbereichen vor, wobei jede Platte eine Fläche von ca. $6.5^\circ \times 6.5^\circ$ umfaßt.

Der Hipparcos- und TYCHO-Katalog beruht auf den Star-Mapping-Daten des Astrometrie-Satelliten Hipparcos und wurde ab Juni 1997 veröffentlicht. Er ist das Endprodukt der von der ESA von November 1989 bis März 1993 durchgeführten und trotz anfänglicher Schwierigkeiten (die vorgesehene Umlaufbahn um die Erde wurde nicht erreicht) äußerst erfolgreichen Hipparcos-Mission. Die Sternpositionen im Hipparcos-Katalog sind z.T. besser als 3 Millibogensekunden und beziehen sich auf die Epoche 1991.25. Der Hipparcos-Katalog enthält 118218 Sterne und ist bis zu

einer (visuellen) Helligkeit von 7^m3 komplett. Nach internationaler Übereinkunft soll er als Referenzkatalog für Aufgaben der optischen Astrometrie verwendet werden. Insbesondere die hohe Genauigkeit in den gemessenen Eigenbewegungen und in den gemessenen Helligkeiten machen ihn für die Lösung stellarstatistische Problemstellungen unverzichtbar.

Der TYCHO-Katalog enthält die Daten von 1,058,332 Sternen (TYCHO-1) bzw. von 2.5 Millionen Sternen (TYCHO-2) mit gegenüber dem Hipparcos-Katalog deutlich reduzierter Genauigkeit (aber noch deutlich genauer als z.B. der PPM). Auf der Grundlage dieses Kataloges wurde z.B. der „*Millenium Star Atlas*“ erstellt. Er enthält über 1058000 Sterne bis zur 11.Größe auf insgesamt 516 Einzelkarten bei einem Maßstab von 100'' pro Millimeter.

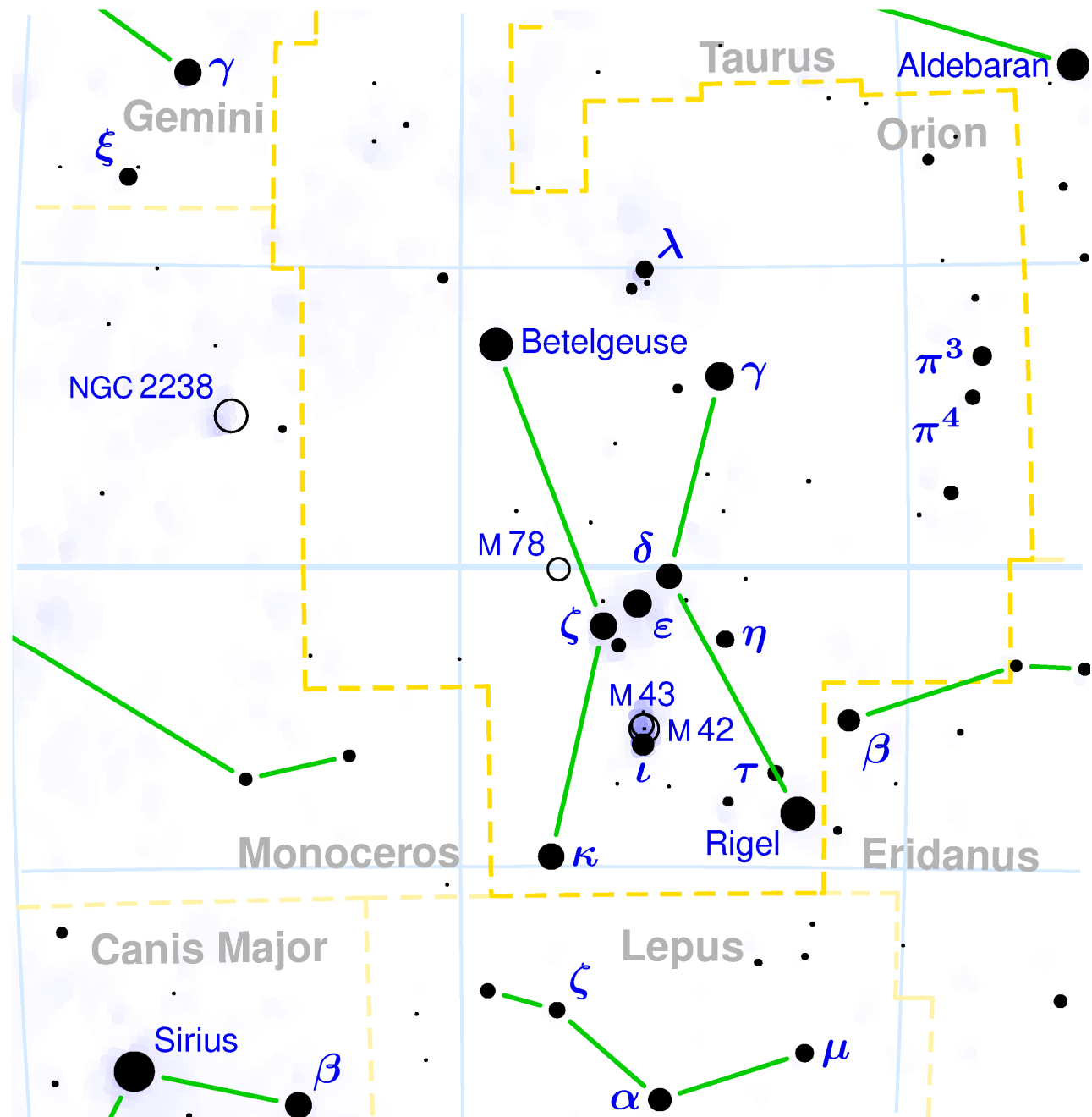
Ein weiterer auf den Hipparcos-Messungen beruhender Sternatlas ist die *Uranometria 2000*. Sie wird in drei Bänden ausgeliefert und enthält insgesamt 280035 Sterne bis zur Grenzgröße 9.75 mag sowie rund 30000 Deep-Sky-Objekte wie Sternhaufen, Gasnebel, Planetarische Nebel und Galaxien. Der Name leitet sich von einem der ersten Sternatlanten der Neuzeit ab, der auch den von Europa unsichtbaren Südhimmel erfaßte. 1603 gab der Jurist und Astronom JOHANN BAYER (1572-1625) seine „*Uranometria Nova*“ heraus. Sie enthielt auf 51 künstlerisch aufwendig gestalteten Kartenblättern alle bereits von CLAUDIUS PTOLEMÄUS (90-160) in seinem „*Almagest*“ erwähnten 48 Sternbilder sowie auf einen Extrablatt den bis dahin in Europa unbekannten Südhimmel, so wie er sich auf Aufzeichnungen von Seefahrern darstellte. Man kann ohne Übertreibung sagen, daß die *Uranometria* von 1603 die „Urform“ aller ihr folgenden Sternatlanten darstellte. Nur verzichtet man heute aus verständlichen Gründen auf eine künstlerische Darstellung der Sternbilder, die – wie im Falle von Andromeda – nur vom eigentlichen Zweck einer Sternkarte ablenken würde...

Sternbilder

Es gibt Sternkonstellationen, die in einem Menschen – auch wenn er noch nie etwas über Astronomie gehört hat – bestimmte Assoziationen hervorrufen. So verbindet man die Sterne des heutigen Sternbilds „Schwan“ sofort zu einem großen Himmelskreuz und es fällt einem nicht schwer, sich darunter einen riesigen Schwan mit ausgestreckten Flügeln vorzustellen. Noch frappierender sieht man das am Beispiel des Sternbildes „Großer Bär“. Die Sterne seines Rumpfes und seines Schwanzes lassen sich unschwer zu einem „Wagen mit Deichsel“ (oder, wenn er tief im Norden steht, zu einer riesigen „Schöpfkelle“) verbinden. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß viele Menschen mit dem Sternbildnamen „Großer Bär“ kaum was anfangen können, den „Großen Wagen“ aber in einer sternklaren Nacht am Himmel leicht identifizieren. Das man die Sterne zu bestimmten Bildern anordnet, kennt man bereits von den antiken Völkern des Zweistromlandes und des alten China. Das hatte sowohl praktische (Kalender) als auch religiöse Gründe. Den Brauch „Götter“ oder Personen der Mythologie an den Himmel zu versetzen, setzte sich über die Jahrhunderte hinweg fort. Die uns heute geläufigen Sternbilder (zumindest des nördlichen Sternhimmels) entstammen überwiegend der griechischen Mythologie. Genaugenommen hat man sie dem berühmten Werk „*Megale syntaxis tes astronomias*“ des im Jahre 90 in Ägypten geborenen griechischen Astronomen CLAUDIUS PTOLEMÄUS entnommen. Dieses Werk überlebte die Antike in einer arabischen Übersetzung (dem „*Almagest*“) und wurde zu einem der wichtigsten Astronomielehrbücher des

Mittelalters. Das erklärt auch, warum ein großer Teil der helleren Sterne am Himmel arabische Eigennamen besitzen.

Mit dem Beginn der Neuzeit und den dabei einhergehenden großen Entdeckungsfahrten kamen neue Sternbilder – insbesondere am Südhimmel – hinzu. Aber auch am Nordhimmel wurden gänzlich neue Sternbilder erfunden, um bestimmte, meist sternarme Lücken am Himmel zu schließen. Genannt seien in diesem Zusammenhang die Sternbilder Luchs (Lynx), Eidechse (Lacerta) und Schild (Scutum). Das Sternbild „Mauerquadrant“ ist dagegen schon wieder längst verschwunden und lebt nur noch in dem Meteorstrom der Quadrantiden weiter.



Sternbild Orion

Bis zu Beginn des vorigen Jahrhunderts waren die Sternbildgrenzen nicht eindeutig und reproduzierbar festgelegt worden. Erst im Jahre 1922 haben sich die Astronomen aus aller Welt auf 88 Sternbilder geeinigt. 1925 übernahm der belgische Astronom EUGENE DELPORTE (1882-1955) die Aufgabe, die Sternbildgrenzen neu festzulegen und zwar parallel zu den Koordinatenkreisen im Äquatorialsystem des Äquinoktiums 1875. Diese Grenzen wurden 1928 auf der IAU-Tagung in Leyden genehmigt und sind seitdem verbindlich.

Die Bezeichnung der hellsten Sterne mit den Buchstaben des griechischen Alphabets wurde von JOHANN BAYER (1572-1625) eingeführt, in dem er den hellsten Stern eines Sternbilds mit „Alpha“, den Zweithellsten „Beta“ usw. bezeichnete. Ein Sternname besteht somit aus einem griechischen Buchstabe gefolgt vom Genitiv des lateinischen Sternbildnamens. Der hellste Stern im Sternbild Löwe ist dann α *Leonis*, oder, - er besitzt einen Eigennamen -, Regulus. β *Leonis* oder Denebola ist dann der zweithellste Stern im Sternbild Löwen. Nach 24 Sternen ist jedoch Schluß, da das griechische Alphabet nun mal nicht mehr Buchstaben hat. Um weitere Sterne in einem Sternbild zu benennen, benutzte Bayer zuerst die kleinen lateinischen Buchstaben von „a“ bis „z“, und dann, wenn sie nicht ausreichten, die entsprechenden Großbuchstaben „A“ bis „Z“. Auf diese Weise konnten er die meisten mit bloßem Auge sichtbaren Sterne bezeichnen. Von FRIEDRICH WILHELM ARGELANDER (1799-1875) stammt übrigens die Empfehlung, daß man die Buchstaben von „R“ bis „Z“ für veränderlichen Stern reservieren sollte. Man hat sich auch weitgehend daran gehalten, weshalb es heute solche Veränderlichentypen wie T-Tauri-Sterne, U-Geminorum-Sterne und R-Coronae-Borealis-Sterne gibt.

Ein anderes, im Prinzip weniger begrenztes Bezeichnungsschema stammt von JOHN FLAMSTEED (1646-1719), dem Begründer und ersten Direktor des berühmten Greenwich-Observatoriums bei London. In seinem bekannten Sternkatalog „*Historia Coelestis Britannica*“ numerierte er einfach die Sterne eines Sternbildes in aufsteigender Rektaszension durch. Der Stern 61 Cygni erinnert noch daran. Es ist der Stern, bei dem erstmalig eine Parallaxenmessung gelungen ist.

Später kamen sogenannte Durchmusterungskataloge auf. Jeder Katalog führte seine eigene Bezeichnungsweise ein. Die Sterne der Bonner Durchmusterung von 1859 beginnen deshalb immer mit „BD“, die Sterne des Henry-Draper-Katalogs (1924) mit „HD“ und die Sterne des Generalkatalogs von BENJAMIN BOSS (1937) mit „GC“. Heute verwendet man häufig die Bezeichner des SAO-Kataloges oder des PPM-Kataloges des Heidelberger Astronomischen Recheninstitutes.

Die folgende Aufzählung gibt als Beispiel alle offiziell gültigen Namen des linken Schultersterns des Sternbilds Orion an:

Beteigeuze, Betelgeuse, $V \alpha$ Ori, α Ori, 58 Ori, ADS 4506 AP, AG +07 681,
BD +07 1055, CCDM J05552+0724AP, CSI +07 1055 1, EIC 108, FK5 224,
GC 7451, GCRV 3679, GEN# +1.00039801J, GSC 00129-01873, HD 39801,
HIC 27989, HIP 27989, HR 2061, IRAS 05524+0723, IRC +10100, JP11 1282,
N30 1266, PLX 1362, PMC 90-93 162, PPM 149643, RAFGL 836, SAO 113271,
SKY# 9804, TD1 5587, TYC 129 1873 1, UBV 213114, YZ 7 2503 ...

... bedeutet, daß in nächster Zukunft mit an Gewißheit grenzender Wahrscheinlichkeit noch weitere Namen für diesen altbekannten Stern hinzukommen werden...

Himmelsmechanik

Bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts beschäftigten sich die meisten Astronomen und viele Mathematiker in erster Linie mit der Positionsbestimmung der Himmelskörper und mit der Aufklärung und Vorhersage ihrer Bewegungen. Die Astrophysik – so wie man sie heute kennt – war damals erst in ihren Anfängen. Das 18. und das 19. Jahrhundert war – astronomisch gesehen – die Blüte der Himmelsmechanik. In dieser Zeit wurden auf der Grundlage der von ISAAC NEWTON (1643-1727) entdeckten Bewegungsgesetze die mathematischen Methoden für die Berechnung von Planeten- und Kometenbahnen entwickelt. Der Höhepunkt war dabei zweifelsohne die „rechnerische“ Entdeckung des Planeten Neptun im Jahre 1847 durch JOHN COUCH ADAMS (1819-1892) und URBAIN JEAN LEVERRIER (1811-1877).

Der „Terminus“ Himmelsmechanik wurde von dem französischen Mathematiker PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827) eingeführt. Seitdem versteht man darunter die mathematische Theorie der Bewegung der Himmelskörper unter dem Einfluß der Newtonschen Gravitationskraft. In ihrer modernen Form verwendet man sie heute u.a. zur Berechnung der Bahnen von interplanetaren Raumsonden, denen wir einen Großteil unseres Wissens über die Planeten des Sonnensystems verdanken. Mit der Möglichkeit, umfangreiche numerische Berechnungen auf Computern ausführen zu können, haben sich auch die Anwendungsfelder der Himmelsmechanik auf Systeme aus sehr vielen Himmelskörpern ausgeweitet. So kann die Dynamik von offenen und kugelförmigen Sternhaufen und ihre Stabilität in der Zeit untersucht werden. Selbst Zusammenstöße von Galaxien können mit wenig Aufwand auf dem heimischen Personalcomputer simuliert werden. Ein weiteres wichtiges Untersuchungsgebiet ist das große Gebiet der chaotischen Bahnen im Sonnensystem. Seit HENRY POINCARÉ's epochemachenden Untersuchungen ist bekannt daß es mechanische Systeme gibt, die über lange Zeiträume zu einem chaotischen Verhalten neigen. Darunter versteht man, daß bereits minimale Änderungen in den Anfangsbedingungen – z.B. im Fall von Planetenbahnen ihrer Positionen – in der Vorhersage zu völlig anderen Bahnen führen. Diese Erkenntnis wird heute unter dem Begriff des deterministischen Chaos zusammengefaßt. Die Langzeit-Stabilität des Sonnensystems ergibt sich – wie man seit einigen Jahren weiß, aus einem diffizilen Ausgleich der Störungen der Planeten untereinander. Trotzdem sind die genauen Positionen der Planeten über Epochen der Größenordnung von 100 Millionen Jahren nicht vorhersagbar.

Es soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, daß die „Himmelsmechanik“ einen genialen Vorläufer besaß, der zwar nicht dem Terminus „Mechanik“ gerecht wird, aber trotzdem weit über 1500 Jahre lang die Bedürfnisse der Menschen die Positionen von Sonne, Mond und Planeten vorherzubestimmen, auf eine erstaunliche Art und Weise gerecht wurde. Es handelt sich dabei um die mathematische Theorie des geozentrischen Weltbildes, welches in der überlieferten Form auf HIPPARCH VON NIKAIÄ (ca. 161-127 v.Chr.) und CLAUDIUS PTOLEMÄUS (ca. 100 bis 178) zurückgeht. Als PTOLEMÄUS um 140 sein ihm berühmt machendes Werk „*mathematikes syntaxeos biblia XIII*“ verfaßte, konnte er bereits auf die Arbeit von vielen Generationen von Astronomen, Mathematiker und Naturphilosophen zurückgreifen. Es können hier nur einige wenige genannt werden: APOLLONIUS VON PERGE (um 262-190 v.Chr.), Theorie der Kegelschnitte, Epyzikeltheorie; HIPPARCH VON NIKAIÄ, genaue Bestimmung von Sonne, Mond und Planetenpositionen,

Verbesserung der Epyzikeltheorie; EUDOXOS VON KNIDOS (408-355 v.Chr.), erster umfangreicher Sternkatalog und Himmelskarte.

Dadurch, daß um 830 muslimische Gelehrte den „*Almagest*“ des PTOLEMÄUS ins Arabische übersetzten, konnte dieses Werk das fundamentalistische Zeitalter des frühen Christentums in Europa unbeschadet überstehen. Über die Mauren, die bis zu KARL MARTELLS (ca. 689 bis 741) Zeiten die iberische Halbinsel besetzt hielten und danach nach und nach aus Europa verdrängt bzw. assimiliert wurden, gelangte es im 10. Jahrhundert wieder in das christliche Abendland, wo es ab etwa 1200 zu einem Standardlehrbuch der zur damaligen Zeit entstandenen Universitäten wurde. Die steigende Bedeutung des *Almagest* erklärt sich auch mit der wachsenden Bedeutung der Seefahrt, die möglichst exakte Methoden zur Ortsbestimmung auf See benötigte. Erinnert sei in diesem Zusammenhang an die „*Alfons'inischen Tafeln*“, die – von König ALFONS X VON KASTILIEN („*al Sabio*“, der „Weise“, 1221-1284) in Auftrag gegeben und auf der Grundlage des *Almagest* berechnet - 1252 erschienen.

Die Sonnen-, Mond- und Planetentheorie des *Almagest* ist eine komplizierte mathematisch-geometrische Theorie ihrer scheinbaren Bewegungen von einem geozentrischen Standpunkt aus. Der physikalische Inhalt ist sehr gering und es war auch nicht unbedingt das Bestreben des Verfassers, eine „natürliche“ Erklärung dessen zu liefern, was die Bewegungen der Himmelskörper hervorruft (die Scholastiker haben suffizient die Widersprüche zur Aristoteles'schen Weltsicht herausgearbeitet). Ausschlaggebend war vielmehr die Vorhersagekraft der Positionen am Himmel für die Zukunft und dieses Ziel wurde so gut erreicht, daß eine Falsifizierung der Theorie erst 1200 Jahre nach ihrem Erscheinen gelang.

Das Ptolemäische Weltsystem

- *Der Himmel ist eine Sphäre, die um eine feste Achse rotiert („kreisende“ Bewegung der zirkumpolaren Sterne um den Himmelspol)*
- *Die Erde ist eine Kugel, die sich im Zentrum der Himmelssphäre befindet und mit ihr einen gemeinsamen Mittelpunkt hat (Geozentrismus)*
- *Die Erde ist nichts als ein Punkt im Vergleich zur Himmelssphäre (fehlende Sternparallaxe)*
- *Die Erde rotiert nicht um die eigene Achse, vielmehr bewegen sich alle Himmelskörper innerhalb eines Tages um die Erde, wobei sie noch eine davon unabhängige Eigenbewegung besitzen (z.B. Planeten = „Irrsterne“)*
- *Die Planeten befinden sich freischwebend zwischen der Erde und der Himmelssphäre, wobei sie eine komplizierte, aus Kreisbewegungen (PLATON (ca. 427-347 v.Chr.)) aufgebaute Bewegung durchführen, die man von der Erde aus als Projektion auf die Himmelssphäre beobachten kann. Die Helligkeitsschwankungen ergeben sich aus der unterschiedlichen Entfernung zur Erde.*
- *Die Reihenfolge der Himmelskörper ist: Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn*

Die Genauigkeit der Positionsbestimmung und die Genauigkeit der Vorhersage hielten sich in der vorteleskopischen Zeit in etwa die Waage (die säkularen Änderungen konnten durch Neujustierung der Parameter sehr gut beherrscht werden) und wurden erst durch die Beobachtungen TYCHO

BRAHES (1546-1601) übertroffen. Aus diesem Grund waren auch nicht irgendwelche Abweichungen zwischen beobachteten und gerechneten Positionen der Ausgangspunkt für eine „Neuordnung“ des Planetensystems durch NIKOLAUS COPERNICUS (1473-1543), sondern das Streben nach einer logischen Vereinfachung und einer „physikalischen“ Erklärung der Planetenbahnen. Der berühmte europäische Gelehrte aus dem Ermland erkannte (niedergelegt in seinen „*Commentariolus*“ von 1515), daß sich die retrograden Planetenbewegungen viel einfacher erklären lassen wenn man - wie ARISTARCH VON SAMOS (um 310-230 v.Chr.) - davon ausgeht, daß sich die Erde genauso wie alle anderen Planeten um die Sonne bewegt. Diese Idee (die sich zu seinen Lebzeiten natürlich in keiner Weise beweisen ließ) wurde seinerzeit in der Fachwelt durchaus mit Interesse aufgenommen (z.B. von GEORG JOACHIM RHAETICUS, eigentl. Joachim von Lauchen (1514-1576) und ERASMUS REINHOLD (1511-1553), der auf der Grundlage des kopernikanischen Systems neue Planetentafeln (*Tabulae Prutenicae*, zusammen mit Herzog ALBRECHT VON PREUßEN (1490-1568)) gerechnet hat, die aber nur geringfügig besser waren als die Alten nach dem Ptolemäischen System). Selbst das 1543 erschienene Hauptwerk des COPERNICUS (*De revolutionibus orbium coelestium*) wurde aufgrund seines mathematischen Charakters von seinen Zeitgenossen nur wenig beachtet, obwohl sich auch die katholische Kirche durchaus dafür interessierte (Papst PAUL DER III (1468-1549) ließ sich darüber im Vatikanischen Garten berichten). Ein Grund war die „Kalendermisere“, deren Lösung immer akuter wurde und schließlich unter Einbeziehung kopernikanischer Ideen 1582 zur „Gregorianischen Kalenderreform“ führte.

Erst reformistische Kirchenlehrer wie PHILIPP MELANCHTON (1497-1560) und MARTIN LUTHER (1483-1546) erkannten die weltanschauliche Brisanz des Heliozentrismus und versuchten, in dem sie Disputationen in den Universitäten verhinderten bzw. die kopernikanische Lehre ins Lächerliche zogen („*Es ward gedacht eines neuen Astrologi, der wollte beweisen, daß die Erde bewegt würde und umbinge, nicht der Himmel oder das Firmament ...*“, Luthers Tischreden). In der katholischen Kirche wurde man dagegen erst im Zusammenhang mit GIORDANO BRUNO (1548-1600) und GALILEO GALILEI (1564-1642) auf das Werk aufmerksam und setzte es nach eingehender Prüfung und unter Einhaltung der Kirchengesetzlichkeiten 1616 auf den Index der verbotenen Bücher (erst 1835 wurde es wieder daraus entfernt).

Der heute oft verwendete Begriff der „kopernikanischen Wende“ oder der „kopernikanischen Revolution“ geht auf den berühmten Königsberger Philosophen IMMANUEL KANT (1724-1804) zurück. Er bezeichnet damit den Umstand, daß man vor Copernicus nur die „Erscheinung“ sah, nicht das Ding an sich, also das, was hinter der Erscheinung steht. Die revolutionäre Erkenntnis, daß sich die komplizierten Planetenbewegungen auf eine einfache Bewegung der Erde um sich selbst und um die Sonne zurückführen lassen, kennzeichnet einen Umdenkprozeß, der wahrhaft revolutionär ist und der das Tor aufstieß, das Wissenschaft im modernen Sinne erst möglich macht. So gesehen ist es kein Zufall, daß sich die Entwicklungen der Astronomie und der Physik zu Beginn des 17. Jahrhunderts nur in der Auseinandersetzung zwischen der geozentrischen und heliozentrischen Weltsicht verstehen lassen (man wollte endlich das „Wesen“ der Himmelserscheinungen ergründen und nicht nur ihre Bewegungen protokollieren). Wie die Geschichte weitergeht, ist bekannt. Was JOHANNES KEPLER (1571-1630) noch mit unendlichem Fleiß erarbeitete, konnte bereits ISAAK NEWTON (1643-1727) aus ein paar als allgemeingültig erkannten Axiomen ableiten. Und mit diesen beiden Gelehrten beginnen genaugenommen die Forschungen in dem Wissensgebiet, das PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827) einmal als Himmelsmechanik bezeichnen wird.

Thesen zum heliozentrischen Weltsystem, Nicolaus Copernicus 1515 („Petitiones zum Commentariolus“)

Erster Satz:

Für alle Himmelskreise oder Sphären gibt es nicht nur einen Mittelpunkt.

Zweiter Satz:

Der Erdmittelpunkt ist nicht Mittelpunkt der Welt sondern nur der der Schwere und des Mondbahnkreises.

Dritter Satz:

Alle Bahnkreise umgeben die Sonne als stünde sie in aller Mitte und daher liegt der Mittelpunkt der Welt in Sonnennähe.

Vierter Satz:

Das Verhältnis der Entfernung Sonne-Erde zur Höhe des Fixsternhimmels ist kleiner als das vom Erdbahnhalbmesser zur Sonnenentfernung, so daß diese gegenüber der Höhe des Fixsternhimmels unmerklich ist.

Fünfter Satz:

Alles was an Bewegung am Fixsternhimmel sichtbar wird, ist nicht von sich aus so, sondern von der Erde aus gesehen. Die Erde also dreht sich mit den ihr anliegenden Elementen in täglicher Bewegung einmal ganz um ihre unveränderlichen Pole. Dabei bleibt der Fixsternhimmel unbeweglich als äußerster Himmel.

Sechster Satz:

Alles was uns an der Sonne an Bewegungen sichtbar wird, entsteht nicht durch sie selbst, sondern durch die Erde und unseren Bahnkreis, mit dem wir uns um die Sonne drehen wie jeder andere Planet. Und so wird die Erde von mehrfachen Bewegungen dahin getragen.

Siebenter Satz:

Was bei den Wandelsternen als Rückgang und Vorrücken erscheint, ist nicht von sich aus so, sondern von der Erde aus gesehen. Ihre Bewegung allein also genügt für so viele verschiedenartige Erscheinungen am Himmel.

Meilensteine der Himmelsmechanik

JOHANNES KEPLER (1571-1630)

Astronomia nova (1609), Harmonice mundi libri V (1618)

Entdeckung der grundlegenden Bewegungsgesetze der Planeten (Keplersche Gesetze) nach Auswertung der Marsbeobachtungen des dänischen Astronomen TYCHO BRAHE (1546-1601).

ISAAK NEWTON (1643-1727)

Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687

Begründung der klassischen Mechanik. Entdeckung des Gravitationsgesetzes. Ableitung der Keplerschen Gesetze aus den Grundgleichungen der Mechanik.

EDMUND HALLEY (1656-1742)

Halley erkennt, daß der von ihm 1682 selbst beobachtete Komet offensichtlich mit den Kometen von 1456, 1531 und 1607 identisch ist. Er berechnet auf der Grundlage der Newtonschen Gravitationstheorie als Bahn eine langgestreckte Ellipse und sagt die Wiederkehr für das Jahr 1758 voraus.

ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713-1765)

The`orie de la lune (1747)

Liefert als erste eine Näherungslösung für das sogenannte Dreikörperproblem.

JOSEPH LOUIS DE LAGRANGE (1736-1813)

Me´canique analytique, 1788

Lagrange entdeckt die Bedeutung der Librationspunkte für die Lösung des Drei-Körper-Problems. Er kann außerdem die Stabilität des Sonnensystems über große Zeiträume nachweisen.

PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827)

Traite´ de me´canique ce´leste, 1799-1825

Dieses Hauptwerk von de Laplace gilt als die Gesamtdarstellung der mathematischen Astronomie des 19. Jahrhunderts.

CARL FRIEDRICH GAUß (1777-1855)

Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum

Entwickelt eine besondere Methode zur Bahnbestimmung von Planeten und Planetoiden. Berechnung der Bahn des von Piazzi am 1.1.1801 entdeckten Planetoiden Ceres.

URBAIN JEAN JOSEPH LEVERRIER (1811-1877),

JOHN COUCH ADAMS (1819-1892),

JOHANN GOTTFRIED GALLE (1812-1910)

Berechnung des Ortes des damals noch unbekannten Planeten Neptun aus den Störungen des Uranus und anschließende Entdeckung durch Galle und d'Arrest in Berlin (23. Sept. 1846).

URBAIN JEAN JOSEPH LEVERRIER (1811-1877)

Versucht die beobachtete Periheldrehung des Planeten Merkur durch die Gravitationswirkung eines neuen inneren Planeten – Vulkan – zu erklären (1846). Heute ist bekannt, daß ein Teil der Periheldrehung ein relativistischer Effekt ist und durch die Allgemeine Relativitätstheorie erklärt wird (ALBERT EINSTEIN, 1916).

FELIX TISSERAND (1845-1896)

Faßt in seinem Monmentalwerk „*Traite de mecanique celeste*“ die Erkenntnisse der Himmelsmechanik seiner Zeit zusammen. Wichtige Arbeiten zur Stabilität des Sonnensystems und zur Störungstheorie (Tisserand-Kriterium).

HENRY POINCARÉ (1854-1912)

Beweist, daß das n-Körperproblem für $n > 3$ nicht mehr algebraisch lösbar ist. Entdeckung des deterministischen Chaos.

ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

Allgemeine Relativitätstheorie (1916). Erklärt die Gravitation als Krümmung der Raum-Zeit. Vorhersage und experimentelle Bestätigung der Lichtablenkung am Sonnenrand (EDDINGTON 1919).

KARL SCHWARZSCHILD (1873-1916)

Löst die Einsteinschen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie für den Fall eines Massepunktes und einer nichtrotierenden Flüssigkeitskugel (Schwarzschild-Metrik). Die Schwarzschild-Metrik bildet die Grundlage der modernen Himmelsmechanik, da sie – im Gegensatz zur Newtonschen Theorie - auch relativistische Effekte mit erfaßt.

ANDREI N. KOLMOGOROW (1903-1987)

VLADIMIR I. ARNOLD

JÜRGEN MOSER (1928-1999)

Formulierung des KAM-Theorems (1954-1967). Dieses Theorem besagt u.a, daß bei Störungen in einem gravitativ gebundenen System (Sonnensystem, Saturnringe etc.) nur die Bahnen auf lange Sicht stabil bleiben, die sich in einem hinreichend irrationalen Frequenzverhältnis zur Störquelle befinden. Dieses Theorem hat große Bedeutung für die Frage, ob ein Planetensystem über lange Zeiträume stabil ist.

Physikalische Grundlagen (Klassische Mechanik)

Bewegungsgesetze

Die klassische Himmelsmechanik beruht auf den drei Grundgesetzen der Mechanik (NEWTON 1687) und dem Gravitationsgesetz (NEWTON, um 1665). In vektorieller Form kann man sie folgendermaßen aufschreiben:

Trägheitsgesetz

Ein Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder er bewegt sich mit geradlinig gleichförmiger Geschwindigkeit, solange keine Kräfte auf ihn einwirken.

Dieses Gesetz ist genaugenommen ein Spezialfall der dynamischen Grundgleichung („Zweites Axiom“) und ergibt sich automatisch, wenn die Kraft gleich Null gesetzt wird. Oder anders ausgedrückt, der Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ bleibt konstant. $\mathbf{v}$ bezeichnet die Geschwindigkeit und m die (träge) Masse des Körpers.

Dynamische Grundgleichung

Die zeitliche Änderung des Impulses $\mathbf{p}$ ist der einwirkenden äußeren Kraft $\mathbf{F}$ proportional und erfolgt in Richtung dieser Kraft:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad [3.1]$$

Action = Reactio, die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich

$$\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba} \quad [3.2]$$

Da Kräfte Vektoren sind, addieren sie sich auch wie Vektoren (Parallelogrammregel).

Die Kraft, unter der sich die Himmelskörper bewegen, ist die Gravitationskraft $\mathbf{F}_G$:

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad [3.3]$$

wobei G als Gravitationskonstante bezeichnet wird ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$).

Dieses für die Himmelsmechanik grundlegende Gesetz sagt folgendes aus:

- die gravitative Anziehung erfolgt in der Verbindungslinie der beider Massen
- die Beträge der Anziehungskraft sind umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung
- die Rollen von anziehender und angezogener Masse sind austauschbar

Das Kraftgesetz (3.2) kann auch mit Hilfe einer Feldfunktion der jeweiligen anziehenden Masse formuliert werden in dem man sagt, daß die anziehende schwere Masse m_q um sich herum ein Gravitationsfeld mit der Feldstärke $g(r)$ aufbaut:

$$\mathbf{g}_q(\mathbf{r}) = -G m_q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|^3}$$

Damit kann (3.1) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathbf{F}_G(\mathbf{r}) = m \mathbf{g}_q(\mathbf{r})$$

Die (schwere) Masse m der angezogenen Masse bezeichnet man oft – in Analogie zur Elektrodynamik wo ein ähnliches Kraftgesetz gilt – als Gravitationsladung.

Aus (3.1) kann man leicht die Bewegungsgleichungen für N Körper unter Einfluß der Kräfte (3.3) aufstellen:

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt}(m_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{F}_{G_k}, \quad k \text{ indiziert die Körper von 1 bis } N \quad [3.4]$$

(3.1) bis (3.4) gelten ausschließlich für Punktmassen. Diese Idealisierung kann in der Himmelsmechanik angewendet werden, da die Ausmaße der Himmelskörper i.d.R. klein sind gegenüber ihren Entfernungen untereinander.

Koordinatensysteme, in denen die Newtonschen Axiome – insbesondere das Trägheitsgesetz – gelten, bezeichnet man als Inertialsysteme. In Nicht-Inertialsystemen treten zusätzlich spezifische Kräfte auf, die als Trägheitskräfte bezeichnet werden. Beispiele sind die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft, die in rotierenden Bezugssystemen auftreten.

Für die Transformation der Bewegungsgleichungen von einem Inertialsystem zu einem anderen verwendet man die Galilei-Transformationen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} t$$

$$t = t' \quad [3.5]$$

Oder anders ausgedrückt, die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik sind bezüglich der Galilei-Transformation invariant.

Wie fand Isaak Newton das Gravitationsgesetz?

Fast jedermann ist bekannt, daß die fallende Frucht eines Apfelbaums Isaak Newton inspirierte, das Gravitationsgesetz zu entdecken. Diese Mähr geht auf seinen (ersten) Biographen, WILLIAM STUKELEY zurück, der von diesem denkwürdigen Ereignis am 15. April 1726 erfahren haben will und zwar von NEWTON selbst. Wenn die Geschichte vielleicht auch nicht unbedingt wahr ist, so ist sie doch zumindest hübsch erfunden ...

Interessanter ist es, die Herleitung des Gravitationsgesetzes aus Newtons' Werken selbst zu rekonstruieren. Da uns die damalige mathematische Denkweise nicht mehr vertraut ist (man

formulierte und dachte fast immer in Proportionen), sollen seine Gedankengänge in moderner Schreibweise nachvollzogen werden. Ausgangspunkt war das dritte Keplersche Gesetz in der Form

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \text{const.}$$

wobei die Indizes jeweils einen anderen Planeten im Sonnensystem bezeichnen. Diese Beziehung läßt sich anhand der Bahnelemente der großen Planeten (und der Bahnen der vier Galileischen Jupitermonde) leicht nachprüfen. Auffällig ist, daß die Verhältnisse für die Planeten und für die Jupitermonde jeweils unterschiedlich sind.

Nun wußte Newton bereits, daß auf einen Körper, der sich auf einer Kreisbahn bewegt, eine zum Mittelpunkt des Kreises gerichtete Zentripetalkraft wirkt. Im Falle der Planetenbewegung muß sie von der Gravitationskraft ausgeglichen werden:

$$F_G = F_Z = \frac{mv^2}{r} = 4\pi^2 m \frac{r}{T^2}$$

Bildet man jetzt das Verhältnis der Zentripetalkräfte zweier unterschiedlich weit von der Sonne entfernter Planeten, dann ist offensichtlich:

$$\frac{F_{Z_1}}{F_{Z_2}} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2}$$

Also unter Berücksichtigung des 3.Keplerschen Gesetzes

$$F_G = F_Z \approx \frac{m}{r^2}$$

Bei der Anwendung dieser Beziehung auf den Mond stellte Newton etwas später fest, daß die gravitative Anziehung der Erde in der Mondentfernung etwa $g/3600$ beträgt mit $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ (Erdbeschleunigung). Da der Mond etwa 60 Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt ist, kam er schließlich auf (3.3), die im nichtrelativistischen Bereich noch heute gilt. Ein halbwegs exakter Wert des Proportionalitätsfaktors – der Newtonschen Gravitationskonstante – wurde 1789 von HENRY CAVENDISH (1731-1810) mit Hilfe einer Drehwaage bestimmt.

Erhaltungssätze

Aus einigen grundlegenden Symmetrien des physikalischen Raumes und der Zeit lassen sich Erhaltungssätze für bestimmte mechanische Größen wie Impuls, Drehimpuls und Energie deduzieren. So ist – wie man mit den Methoden der Theoretischen Mechanik zeigen kann - der Impulserhaltungssatz eine direkte Konsequenz der Homogenität des physikalischen Raumes. Er hat folgende Form:

$$\sum_k m_k \mathbf{v}_k = \mathbf{p} = \text{const.}$$

[3 . 6]

Solange keine äußeren Kräfte wirken, bleibt der Gesamtimpuls eines Systems aus N Körpern konstant.

Auch für den Drehimpuls $\mathbf{L}$ gilt ein Erhaltungssatz. Dabei versteht man unter $\mathbf{L}$ einen axialen Vektor, der eine Drehachse definiert, die senkrecht auf der Ebene steht, die durch den Ortsvektor $\mathbf{r}$ und den linearen Impuls $\mathbf{p}$ aufgespannt wird:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad [3.7]$$

Differenziert man diese Vektorgleichung nach t , dann erhält man das Drehmoment $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad [3.8]$$

Das Vektorprodukt $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ verschwindet nur dann, wenn die Richtung des Ortsvektors $\mathbf{r}$ entweder mit der Richtung der Kraft $\mathbf{F}$ zusammenfällt oder genau entgegengesetzt gerichtet ist. Das ist bei der Gravitationskraft (3.3) der Fall, so daß – wegen (3.8) – $\mathbf{L} = \text{const.}$ sein muß.

Allgemein kann man sagen:

Kräfte, die ausschließlich in Richtung des Ortsvektors (oder entgegengesetzt) wirken, implizieren Drehimpulserhaltung. Derartige Kräfte nennt man Zentralkräfte und Felder, die derartige Kräfte implizieren, Zentralkraftfelder.

Die Gravitation ist ein derartiges Zentralkraftfeld.

Für ein System aus N Punktmassen in einem Zentralkraftfeld lautet der Drehimpulserhaltungssatz

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \mathbf{L} = \text{const.} \quad [3.9]$$

Wird eine Masse m unter dem Einfluß einer Kraft $\mathbf{F}$ längs eines Weges l verschoben, dann leistet die Kraft $\mathbf{F}$ die Arbeit

$$W = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.10]$$

Wenn diese Verschiebung gemäß (3.4) erfolgt, dann wird aus (3.10) mit P_1 als Ausgangspunkt und P_2 als Endpunkt der Verschiebung:

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \Big|_{v(P_1)}^{v(P_2)} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \quad [3.11]$$

Diese Größe ist die kinetische Energie T . Eine Geschwindigkeitsänderung = Beschleunigung einer Masse m führt also zu einer Änderung der kinetischen Energie der Masse m .

Die gesamte kinetische Energie eines Ensembles von N Punktmassen ist dann

$$T = \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 \quad [3.12]$$

Besitzt die Kraft $\mathbf{F}$ ein ortsabhängiges Potential V (konservative Kraft), dann läßt sich zeigen, daß das Integral (3.10) wegunabhängig ist:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{P_1}^{P_2} \text{grad } V \cdot d\mathbf{r} \quad [3.13]$$

und da $d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$

$$- \int_{P_1}^{P_2} dV = V \Big|_{P_1}^{P_2} = V(P_1) - V(P_2) \quad [3.14]$$

Diese Potentialdifferenz wird als potentielle Energie bezeichnet.

Da sowohl (3.12) als auch (3.14) zwischen den beiden Punkten P_1 und P_2 gilt, müssen beide Anteile (bis auf ein additives Glied in V) gleich sein:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = V_1 - V_2, \quad [3.15]$$

also

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Diese Beziehung stellt den Energieerhaltungssatz dar. Die Gesamtenergie E eines Ensembles von N Punktmassen in einem konservativen Kraftfeld ist konstant:

$$E = \sum_k m_k \mathbf{v}_k^2 + V = \text{const.} \quad [3.16]$$

Ein dritter wichtiger Erhaltungssatz ist der Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes eines Systems aus N Körpern. Ist M die Gesamtmasse aller N Körper, dann wird deren gemeinsamer Schwerpunkt S durch den Ortsvektor

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{M} \sum_k m_k \mathbf{r}_k \quad [3.17]$$

bestimmt.

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung (3.1) ein, dann erhält man:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2} = \mathbf{F}$$

Löst man diese Gleichung für den Fall, daß keine äußeren Kräfte wirken, also $\mathbf{F} = 0$, so erkennt man, daß der Schwerpunkt S eine geradlinig gleichförmige Bewegung $\mathbf{v}_s = \text{const.}$ (die in einem geeignet gewählten Inertialsystem verschwindet) ausführt und zwar unabhängig davon, wie sich die einzelnen Massen m_k unter der Einwirkung von „inneren Kräften“ untereinander bewegen:

$$\frac{d \mathbf{r}_s}{dt} = \text{const.} \quad \text{Schwerpunktsatz} \quad [3.18]$$

Bewegung der Himmelskörper im Gravitationsfeld

Jede Masse m_1 hat die Eigenschaft, eine andere Masse m_2 mit einer bestimmten Kraft $\mathbf{F}_g$, die sich aus (3.3) ergibt, anzuziehen. Eine Masse, die genau diese Eigenschaft besitzt, wird als „schwere Masse“ bezeichnet. Die Masse, die in (3.1) eingeht, wird dagegen als „träge Masse“ bezeichnet. Sie ist für das „Beharrungsvermögen“ eines Körpers in bezug auf Geschwindigkeitsänderungen verantwortlich. Experimentell ist außergewöhnlich gut verifiziert, daß die träge Masse der schweren Masse streng proportional ist was dazu führt, daß alle Massen unabhängig davon, aus was sie auch bestehen, mit gleicher Beschleunigung in einem Schwerfeld fallen (Eötvös-Dicke-Experiment 1922/63). Bei geeigneter Wahl eines Bezugsrahmens kann man deshalb träge und schwere Masse gleichsetzen, was sowohl in der klassischen Mechanik als auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie getan wird. Die Frage, wieso träge und schwere Masse gleich sind, ist auch heute noch Gegenstand intensiver wissenschaftlicher Forschung (Stichwort: Mach'sches Prinzip).

In der Himmelsmechanik betrachtet man in den meisten Fällen Punktmassen, die untereinander gravitativ wechselwirken. Ihre Dynamik kann vollständig aus den Newtonschen Grundgesetzen und dem Gravitationsgesetz erschlossen werden. Relativistische Effekte brauchen i.d.R. nur dann berücksichtigt zu werden, wenn es um außergewöhnlich hohe Genauigkeiten ankommt wie z.B. bei der Berechnung der Bahnen interplanetarer Raumsonden oder bei der Berechnung von Bahnen um äußerst kompakte Objekte (Neutronensterne, Schwarze Löcher). Hier erfolgt der Zugang über die Schwarzschild-Metrik der Allgemeinen Relativitätstheorie, wo das Gravitationsfeld nicht mehr durch ein einfaches Potential V beschrieben wird, sondern durch einen metrischen Tensor mit insgesamt 16 Komponenten.

Zweikörperproblem (Kepler-Problem)

Die Bewegungsgleichungen der $i=1 \dots 9$ großen Planeten um die Sonne ergeben sich aus (3.1) und (3.3), wo $\mathbf{r}_{ik}$ der Abstandsvektor zwischen den Planeten i und k und $\mathbf{r}_{i\odot}$ der Abstandsvektor vom Planeten i zur Sonne $\odot$ darstellt:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{i \neq k} m_i m_k \frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}^2 |\mathbf{r}_{ik}|} - G M_{\odot} m_i \frac{\mathbf{r}_{i\odot}}{r_{i\odot}^2 |\mathbf{r}_{i\odot}|} \quad [3.19]$$

G Newtonsche Gravitationskonstante

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die gravitative Wechselwirkung der Planeten untereinander und ist aufgrund der geringen Planetenmassen im Vergleich zur Sonnenmasse absolut gesehen recht klein. In einer ersten Näherung kann sie vernachlässigt und in einer zweiten Näherung als „Störung“ der Planetenbahnen um die Sonne betrachtet werden. Die erste Näherung führt zum sogenannten Zweikörperproblem, das im Folgenden exakt gelöst werden soll. Ziel ist es, die Funktionen $\mathbf{r}_p(t)$ für den Planeten relativ zur Position der Sonne zu bestimmen. Bezeichnet

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}_p \quad [3.20]$$

den Verbindungsvektor zwischen Sonne und Planeten, dann folgt aus (3.19) das folgende Gleichungssystem:

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = G M_{\odot} m_p \frac{\mathbf{r}}{r_{p\odot}^3} \quad [3.21]$$

$$M_{\odot} \frac{d^2 \mathbf{r}_{\odot}}{dt^2} = -G M_{\odot} m_p \frac{\mathbf{r}}{r_{\odot p}^3}$$

Befindet sich die Sonne genau im Zentrum des Koordinatensystems, dann kann man (3.21) in folgende Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_{\odot}}{dt^2} = \frac{G}{r^3} (M_{\odot} + m_p) \mathbf{r}$$

also

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G}{r^3} (M_{\odot} + m_p) \mathbf{r} \quad [3.22]$$

(3.22) stellt ein Gleichungssystem aus 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung dar. Die Lösung dieses Anfangswertproblems liefert als Ergebnis den Lösungsvektor $\mathbf{r}(t)$, der die Bahnkurve des Planeten um die (hier als ruhend angenommene) Sonne beschreibt.

Multipliziert man die linke Seite von (3.22) vektoriell mit dem Radiusvektor $\mathbf{r}$, dann ergibt sich, da der Beschleunigungsvektor parallel zum Radiusvektor liegt:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{r} = 0$$

und wegen der Identität

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right)$$

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{const.}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit der Planetenmasse m_p , dann erhält man eine Größe, die man als Bahndrehimpuls bezeichnet:

$$m_p \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{L} = \text{const.}$$

[3.23]

Da offensichtlich $\mathbf{r} \times \mathbf{L} = 0$ ist, muß sich die Bewegung des Planeten in einer Ebene senkrecht zu $\mathbf{L}$ abspielen. Das Flächenelement dA , das dabei während der Zeit dt vom Radiusvektor $\mathbf{r}$ überstrichen wird, erhält man aus dem Betrag des Vektorprodukts

$$dA = \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Unter Verwendung von (3.23) ist demnach

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m_p} \left| m \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \text{const.}$$

[3.24]

und nach Integration:

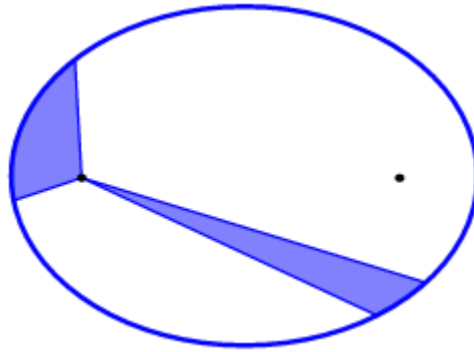
$$A = \frac{L}{2m_p} (t - t_0)$$

[3.25]

Da der Bahndrehimpuls (3.23) konstant ist, sagt (3.25) folgendes aus:

Die Verbindungslinie Planet-Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Dieses Gesetz wurde 1609 von JOHANNES KEPLER (1571-1630) empirisch gefunden, in dem er die Marsbeobachtungen von TYCHO BRAHE (1546-1601) einer umfangreichen mathematischen Analyse unterzog. Es wird seitdem als 2. Keplersches Gesetz bezeichnet. Hier folgt der Flächensatz – wie er auch genannt wird – ganz natürlich aus der Erhaltung des Bahndrehimpulses in einem Zentralkraftfeld.



Graphische Darstellung des Zweiten Keplerschen Gesetzes. Die ausgefüllten Flächen sind gleich

Wie sehen nun konkret die Bahnkurven aus? Um diese Frage zu beantworten ist es nützlich, (3.23) durch die Planetenmasse m_p zu dividieren und von dem entstehenden konstanten Vektor $\mathbf{k}$ die Zeitableitung zu bilden (der Einheitsvektor in Richtung von $\mathbf{k}$ ist ein Binormalenvektor bezüglich der durch das Vektorprodukt in (3.23) definierten Ebene):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad [3.26]$$

also, da die Geschwindigkeitsvektoren parallel sind

$$\frac{d}{dt}\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M_\odot + m_p}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \quad [3.27]$$

Vektorielle Multiplikation mit (3.22) liefert:

$$\mathbf{k} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \left(-G \frac{M_\odot + m_p}{r^3} \mathbf{r} \right) \quad [3.28]$$

und nach Anwendung des Entwicklungssatzes

$$-G \frac{M_\odot + m_p}{r^3} \left[\left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \mathbf{r} \right] = -G \frac{M_\odot + m_p}{r^3} \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} \right) \mathbf{r} \right]$$

Dieser Ausdruck läßt sich zu

$$\mathbf{k} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M_{\odot} + m_p}{r^2} \left(r \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} r \right) \quad [3.29]$$

vereinfachen und mit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} r \right) \quad [3.30]$$

auf folgende Form bringen:

$$\mathbf{k} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G (M_{\odot} + m_p) \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad [3.31]$$

Integration nach dt ergibt

$$\mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -G (M_{\odot} + m_p) \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) - \mathbf{A} \quad [3.32]$$

$\mathbf{A}$ ist ein konstanter Vektor (Runge-Lenz-Vektor), der in der Bahnebene liegt und – wie noch gezeigt wird - zum sonnennächsten Punkt der Planetenbahn zeigt.

Skalare Multiplikation mit $\mathbf{r}$ und Anwendung der Identität $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -a^2$

führt demnach zu

$$k^2 = G(M_{\odot} + m_p) r - \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \quad [3.33]$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{r}$ mit φ (er wird auch „wahre Anomalie“ genannt), dann kann die Entfernung r des Planeten zur Sonne als Funktion von φ geschrieben werden:

$$r(\varphi) = \frac{k^2}{G(M_{\odot} + m_p) + A \cos \varphi} \quad [3.34]$$

Führt man jetzt noch folgende Parameter ein

$$p = \frac{k^2}{G(M_{\odot} + m_p)} \quad [3.35]$$

$$e = \frac{A}{G(M_{\odot} + m_p)} \quad [3.36]$$

dann wird offensichtlich, daß es sich bei (3.37) um die Darstellung von Kegelschnitten in Polarkoordinaten handelt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad [3.37]$$

Diese Gleichung wird auch als Polargleichung bezeichnet und zwar deshalb, weil ein Brennpunkt des jeweiligen Kegelschnitts mit dem Polarpunkt ($r = 0$) zusammenfällt.

Setzt man $e < 1$ (Bahnexzentrizität) und $p = a(1 - e^2)$ dann ergibt sich als Bahnkurve eine Ellipse mit der Exzentrizität e und der großen Halbachse a als Lösung der Bewegungsgleichung.

1. Keplersche Gesetz:

Planeten bewegen sich auf Ellipsen (genauer Kegelschnitten), in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Die Gleichung (3.37) beschreibt nicht nur die Kepler-Ellipse. Je nach dem welchen Wert e hat, ergeben sich folgende Bahnformen:

$0 < e < 1$ Ellipse [3.38a-d]

$e = 0$ Kreis (Spezialfall einer Ellipse mit der Exzentrizität 0)

$e = 1$ Parabel

$e > 1$ Hyperbel

Ellipsen- und Hyperbelbahnen werden zusätzlich noch durch die große Halbachse a , die kleine Halbachse b und durch den Parameter p beschrieben. Im Einzelnen gilt:

$$p = a(1 - e^2), \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \quad \text{Ellipse} \quad [3.39]$$

$$p = a(e^2 - 1), \quad b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad \text{Hyperbel} \quad [3.40]$$

Die einzelnen Bahnformen können auch über die Bahngeschwindigkeiten $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ katalogisiert werden.

In Polarkoordinaten erhält man für das Quadrat der Geschwindigkeit v :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad [3.41]$$

Zur Berechnung der Zeitableitung des Winkels φ kann der Flächensatz (3.24) herangezogen werden. Legt man ein kartesisches Koordinatensystem so, daß die x- und y-Achse in der durch den axialen

Vektor $\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{const.}$ definierte Ebene liegen, dann können die Komponenten von $\mathbf{k}$ in Polarkoordinaten über die Determinante

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r \cos \varphi & r \sin \varphi & 0 \\ \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} & \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

berechnet werden. Damit läßt sich (3.24) folgendermaßen in Polarkoordinaten schreiben:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} k = \text{const.} \quad [3.42]$$

Hieraus ergibt sich mit (3.37):

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{r^4} k^2 = \frac{1}{r^4} G(M_\odot + m_p) p \quad [3.43]$$

und wegen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

folgt nach Differentiation von (3.37) und einsetzen in (3.41) nach kurzer Rechnung

$$v^2 = G(M_\odot + m_p) \left(\frac{2p + r(e^2 - 1)}{rp} \right) \quad [3.44]$$

Für die Ellipse gilt demnach ($p = a(1 - e^2)$)

$$v^2 = G(M_\odot + m_p) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) < \frac{2G(M_\odot + m_p)}{r} \quad [3.45a]$$

Nur in diesem Fall liegt eine „gebundene“ Bewegung vor.

Für einen Himmelskörper, der sich dagegen auf einer Hyperbel um die Sonne bewegt, gilt folgende Beziehung ($p = a(e^2 - 1)$):

$$v^2 = G(M_\odot + m_p) \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) > \frac{2G(M_\odot + m_p)}{r} \quad [3.45b]$$

Die Parabel ist ein Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel. Ein Himmelskörper, der sich auf einer Parabel bewegt, erreicht wegen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2G(M_{\odot} + m_p)}{r}} = 0 \quad [3.45c]$$

nur „geradeso“ das Unendliche.

Für die Ellipsenbahn läßt sich eine weitere interessante Beziehung ableiten, die gleichsam aus der Erhaltung des Bahndrehimpulses folgt.

Für die Ellipsenfläche gilt die bekannte Beziehung

$$F_E = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad [3.46]$$

Nach dem zweiten Keplerschen Gesetz gilt demnach (siehe (3.25)):

$$F_E = \frac{1}{2} k T \quad [3.47]$$

wobei T die Umlaufszeit des Planeten ist. Berücksichtigt man noch (3.43), dann erhält man:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_{\odot} + m_p)} \quad [3.48]$$

Da die linke Seite für $m_p \ll M_{\odot}$ für alle Planeten näherungsweise eine Konstante ist, gilt folgender Satz:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad [3.49]$$

Die Kuben der großen Halbachsen zweier Planeten verhalten sich wie die Quadrate ihrer Umlaufszeiten.

Das ist das 3. Keplersche Gesetz, wie es JOHANNES KEPLER 1619 in seinem Werk „*Harmonices mundi*“ veröffentlicht hat. Wie man aus (3.48) ablesen kann, gilt dieses Gesetz nur dann exakt, wenn die Planetenmassen gegen die Masse des Zentralkörpers – also der Sonne – zu vernachlässigen sind.

Mit Hilfe dieses Gesetzes kann man die mittleren Entfernungen der einzelnen Planeten und Planetoiden im Sonnensystem sehr leicht bestimmen wenn ihre Umlaufszeiten bekannt sind und wenn man die Umlaufszeit und die große Halbachse z.B. der Erdbahn als Referenzgröße kennt. Außerdem ist es möglich, aus den Bahndaten die Massensumme der beiden Körper zu berechnen, was besonders in der Stellarastronomie von Bedeutung ist, wo das dritte Keplersche Gesetz oft zur Abschätzung der Massenverhältnisse in Doppelsternsystemen verwendet wird.

Zur Lösung des Zweikörperproblems benötigt man als Anfangswerte sechs Integrations-konstanten. Im einfachsten Fall sind das die Komponenten des Radiusvektors und die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors zu einem Anfangszeitpunkt t . Für die praktische Beschreibung einer konkreten Bahn – z.B. eines Planetoiden oder Kometen – sind diese beiden Vektoren jedoch nur wenig geeignet. Man verwendet deshalb in der Himmelsmechanik einen Satz von Parametern, die man als Bahnelemente bezeichnet und die im Wesentlichen die Bahngeometrie beschreiben. Als Bezugsebene wird im Sonnensystem die Ekliptikalebene – also die Ebene, in der die Erdbahn liegt – gewählt. Diese Ebene fällt mit einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung im Zentrum der Sonne und der z-Achse in Richtung des Vektors $\mathbf{L}$ der Erdbahn zusammen. Die x-Achse zeigt in Richtung des aufsteigenden Knotens der Erdbahn (Frühlingspunkt).

Keplers Planetengesetze in Originalfassung (Harmonice mundi, 1619)

1. Gesetz

... sequenti capite, ubi simul etiam demonstrabitur, nullam Planetæ relinqui figuram Orbitæ, præterquam perfecte ellipticam; conspirantibus rationibus, a principiis Physicis, derivatis, cum experientia observationum et hypotheseos vicariæ hoc capite allegata.

Für den Planeten bleibt keine andere Bahnfigur übrig als eine vollkommene Ellipse, weil die aus physikalischen Prinzipien abgeleiteten Gründe mit den Ergebnissen der Beobachtungen und der stellvertretenden Hypothese im Einklang stehen.

2. Gesetz

Quare ex superioribus, sicut se habet CDE area ad dimidium temporis restitutorii, quod dicatur nobis 180° gradus: sic CAG, CAH areae ad morarum in CG et CH diuturnitatem. Itaque CGA area fiet mensura temporis seu anomalie mediæ, quæ arcui eccentrici CG respondet, cum anomalia mediæ tempus metiatur.

Wie sich die Fläche CDE zur halben Umlaufszeit, die wir mit 180° bezeichnen, verhält, so verhalten sich die Flächen CAG oder CAH zu den Zeiten, die der Planet auf CG oder CH verweilt. So wird also die Fläche CGA ein Maß für die Zeit oder die mittlere Anomalie, die dem Exzenterbogen CG entspricht, da die mittlere Anomalie ein Maß für die Zeit ist.

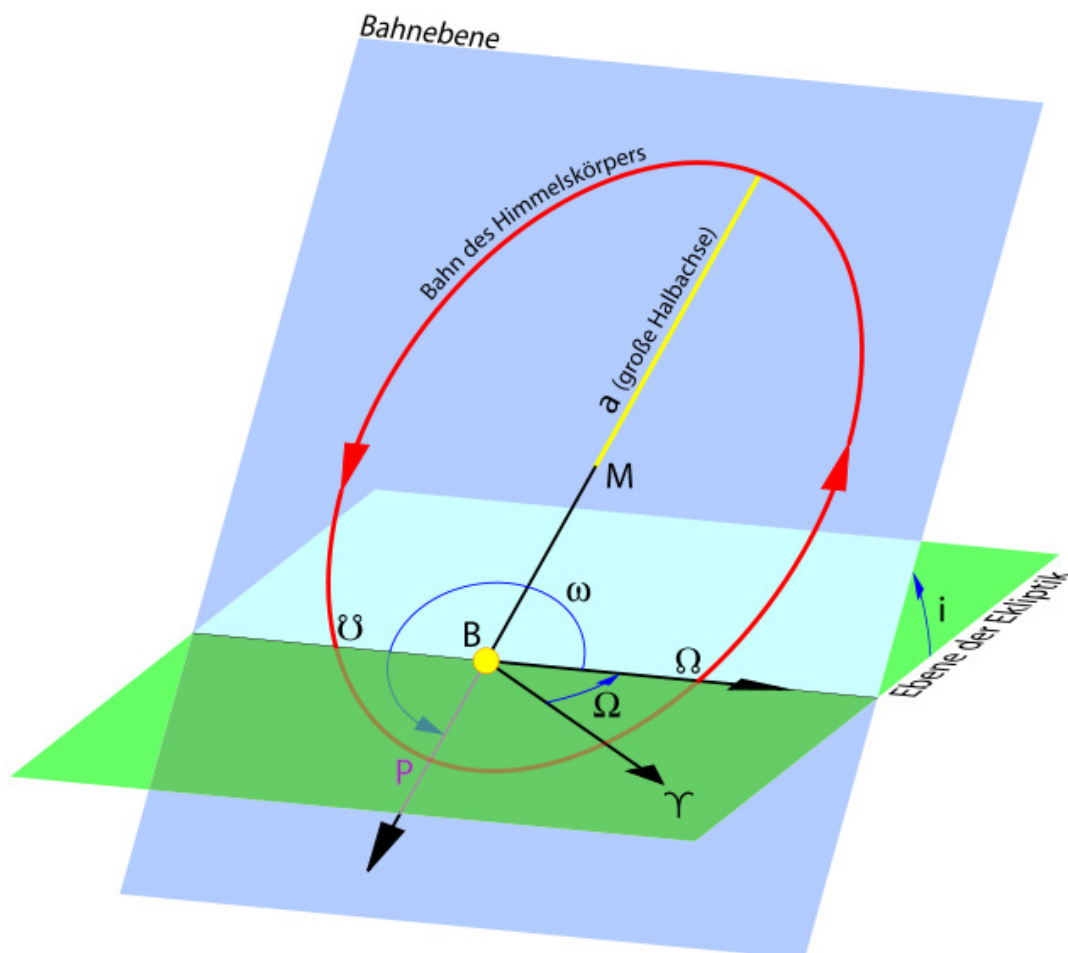
3. Gesetz

Sed res est certissima exactissimaque, quod proportio quæ est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit præcise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est Orbium ipsorum

Es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, daß die [logarithmische] Proportion, die zwischen den Umlaufszeiten je zweier Planeten besteht, genau das Anderthalbfache der Proportion der mittleren Abstände ist

Bahnelemente

Die Bahnelemente eines Himmelskörpers kann man in drei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe beschreibt die Geometrie der Bahn, also z.B. die Große Halbachse a und die numerische Exzentrizität e einer Bahnellipse. Die zweite Gruppe enthält Parameter, welche die Lage der Bahn in bezug auf eine Referenzebene bestimmen. Dazu gehören die Bahnneigung i und die Länge des aufsteigenden Knotens Ω . Unter der Knotenlänge versteht man den in der Referenzebene gemessenen heliozentrischen Winkel zwischen dem Frühlingspunkt und dem aufsteigenden Knoten Ω . Als Referenzebene wird im Sonnensystem die Ekliptikalebene = Ebene der Erdbahn, verwendet. Eine weitere Größe ist der Perihelabstand ω . Auch hier handelt es sich um einen heliozentrischen Winkel. Er gibt konkret den Abstand des Perihels – also des sonnennächsten Punktes der Bahn - vom aufsteigenden Knoten Ω an. In der Himmelsmechanik verwendet man anstelle von ω oft einer anderen Größe, die Perihellänge $\tilde{\omega}$. Sie stellt die Summe der beiden Winkel Ω und ω dar, von denen der erste in der Ekliptik und der zweite in der Bahnebene des Himmelskörpers gemessen wird. Die letzte Gruppe enthält nur einen Parameter. Er legt den zeitlichen Bezugspunkt der Bahn fest und wird als Perihelzeit τ (oder Epoche) bezeichnet. Das ist genau der Zeitpunkt, in dem der Himmelskörper das Perihel seiner Bahn durchläuft.



Elemente einer Ellipsenbahn um die Sonne – heliozentrische Bahnelemente

Ein vollständiger Satz von Bahnelementen enthält demnach folgende Größen:

- Große Halbachse der Bahn a
- Numerische Exzentrizität e
- Bahnneigung i
- Länge des aufsteigenden Knotens Ω
- Perihellänge $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$
- Perihelzeit τ

Eine weitere Größe ist (bei einer elliptischen Bahn) die siderische Umlaufsperiode T . Sie ergibt sich explizit aus dem dritten Keplerschen Gesetz (3.48). Das bedeutet, sie ist keine von den anderen Bahnelementen unabhängige Größe.

Diese sechs Bahnelemente hängen mit den Integrationskonstanten des Zweikörperproblems zusammen und sind so gewählt, daß sie für praktische Rechnungen – also z.B. für die Bahnbestimmung aus Positionsbeobachtungen und für die Ephemeridenrechnung – möglichst optimal geeignet sind. Natürlich sind zur Beschreibung der Bahn eines Himmelskörpers auch andere Parametrisierungen möglich (z.B. kann man dafür die Komponenten des Vektors des Bahndrehimpulses und des Runge-Lenz-Vektors verwenden). Bedingung ist nur, daß sie voneinander unabhängig sind und sich explizit durch die sechs Integrationskonstanten ausdrücken lassen.

Für den obigen Satz gilt z.B.

a) Bahnneigung i , Länge des aufsteigenden Knotens Ω

Diese Größen bestimmen die Bahnlage bezüglich der Referenzebene (Ekliptik).

Nach (3.23) kann man den Binormalenvektor $\mathbf{k}_0$ in Richtung des Bahndrehimpulses auch folgendermaßen ausdrücken (nach Division durch m_p):

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = k \mathbf{k}_0 = \text{const.} \quad \text{mit } k = |\mathbf{k}| \quad [3.50]$$

Da die drei durch das Vektorprodukt verknüpften Vektoren ein rechtshändiges Koordinatensystem aufspannen, bewegt sich der Himmelskörper von der Spitze des Binormalenvektors $\mathbf{k}_0$ aus betrachtet entgegen dem Uhrzeigersinn. Die dadurch bestimmte x-y-Ebene (aufgespannt durch die beiden Einheitsvektoren $\mathbf{A}_0$ und $\mathbf{Q}_0$) ist gegen die Referenzebene um den Winkel i geneigt. Die Schnittgerade zeigt in Richtung des aufsteigenden Knoten Ω .

Der Binormalenvektor $\mathbf{k}_0$ läßt sich dann bezüglich der Referenzebene folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{k}_0 = \begin{bmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{bmatrix} \quad [3.51a]$$

b) Perihelabstand ω

Der Vektor $\mathbf{A}$ zeigt in Richtung Perihel, d.h. er liegt auf der Apsidenlinie zwischen Aphel und Perihel. Der Winkel in bezug auf die Knotenlinie ist der Perihelabstand ω . Für den Einheitsvektor $\mathbf{A}_0$ ergibt sich nach drei Elementardrehungen um ω , i und Ω :

$$\mathbf{A}_0 = D_z(\omega) D_x(i) D_z(\Omega) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad [3.51c]$$

Der Vektor, der in der Bahnebene senkrecht auf $\mathbf{A}_0$ steht, hat dann in Bezug auf die Referenzebene folgende Komponenten:

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i \\ -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \sin i \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad [3.51d]$$

Die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren eines Himmelskörpers können – da $\mathbf{A}_0$ und $\mathbf{Q}_0$ linear unabhängig sind und eine orthogonale Basis bilden – als deren Linearkombinationen geschrieben werden, z.B.

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \mathbf{A}_0 + r \sin \varphi \mathbf{Q}_0 \quad [3.51e]$$

Die Basisvektoren $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{A}_0$ und $\mathbf{Q}_0$ werden nach CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) als Gauß'sche Vektoren bezeichnet. Sie bestimmen das (heliocentrische) kartesische Koordinatensystem der Bahnbewegung. $\mathbf{A}_0$ zeigt in Richtung der x-Achse, $\mathbf{Q}_0$ in Richtung der y-Achse und $\mathbf{k}_0$ in Richtung der z-Achse.

c) Große Halbachse a , Exzentrizität e

Diese beiden Größen sind über die Polargleichung miteinander verknüpft (siehe (3.37) und (3.39), (3.40))

d) Perihelzeit τ

Mit diesem Anfangswert wird eine räumliche Position mit einem Zeitpunkt verknüpft. Das erlaubt die Berechnung der Bahnkurve als Funktion der Zeit.

Der Flug zur Venus

Nachdem in letzter Zeit besonders der Planet Mars im Blickpunkt von unbemannten Raummissionen stand, soll mit Venus-Expreß 2005 (ESA) nun auch unser innerer Nachbar wieder Besuch von der Erde erhalten. Es ist klar, daß man eine solche Mission nicht zu einem beliebigen Zeitpunkt starten kann. Die Frage ist, welche Konstellation muß Erde und Venus einnehmen, damit eine Sonde mit geringstmöglicher Anfangsenergie den Planeten erreicht. Und wie lange wird solch ein Flug eigentlich dauern? Diese Fragen lassen sich leicht mit etwas Himmelsmechanik beantworten.

Die Bahn mit der minimalsten Energie ist offensichtlich die, welche die Position der Erde im Perihel mit der Position der Venus im Aphel verbindet. Ihre große Halbachse ist bereits durch diese Bedingung eindeutig bestimmt:

$$a = \frac{R_E + R_V}{2} \approx 1.29 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Sie zeigt unter den genannten Voraussetzungen in Richtung der Verbindungslinie Erde (Startzeitpunkt) – Sonne – Venus (Ankunftszeitpunkt). Die nächste Frage ist, wie groß die Exzentrizität e der Bahn sein muß. Da die kleine Halbachse b nicht gegeben ist, kann sie nicht direkt über (3.39) berechnet werden. Bei der Ellipse ist sie aber bekanntlich nichts anderes als der Abstand d ihrer beiden Foki (wobei in dem einen die Sonne steht) dividiert durch $2a$. Sowohl von der Venus aus gesehen als auch von der Erde aus gesehen befindet sich die Sonne immer in einem Brennpunkt ihrer jeweiligen Bahnellipse. Deshalb folgt für d :

$$d = 2(a - R_V) = R_E - R_V, \text{ also}$$

$$e = \frac{R_E - R_V}{R_E + R_V} \approx 0.16$$

Damit ist die Bahnform eindeutig festgelegt. Derartige Bahnen werden übrigens als Hohmann-Transferbahnen bezeichnet.

Um diese Bahn zu erreichen, muß der Satellit auf eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit gebracht werden. Nach (3.45b) ist:

$$v^2 = 2GM_{\odot} \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + R_V} \right) \approx 27.3 \text{ km s}^{-1}$$

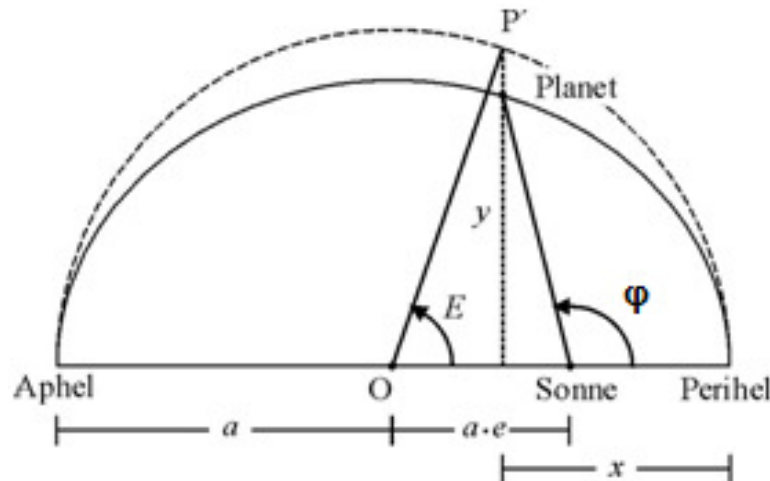
Da sich die Erde mit ca. 30 km/s auf ihrer Bahn um die Sonne bewegt, muß die Venussonde in entgegengesetzter Richtung abgeschossen werden. Für den Flug zur Venus hat sie nur den halben Bahnumfang zu bewältigen, so daß auch die Flugzeit nur die halbe Umlaufszeit der Sonde um die Sonne beträgt. Das sind nach dem dritten Keplerschen Gesetz $T/2 \sim 146$ Tage. Für die Reise des Venus-Expreß wird eine Dauer von ungefähr 150 Tagen angegeben.

Kepler-Gleichung

Die Bewegung eines Himmelskörpers auf seiner elliptischen Bahn, dessen Ebene durch $\mathbf{k}_0$ bestimmt ist, kann auf dieser Ebene durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad [3.52]$$

wobei x und y kartesische Koordinaten sind, wobei die x -Achse auf der Apsidenlinie liegt. Um die Ellipse mit dem Mittelpunkt O wird ein Kreis mit dem Radius a gelegt. Projiziert man nun den Ort des Himmelskörpers senkrecht zur x -Achse auf diesen Kreis, dann wird die Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkt der Ellipse und dem auf den Kreis projizierten Ort einen Winkel E zur x -Achse bilden. Dieser Winkel E wird als exzentrische Anomalie bezeichnet. In dem man E anstelle der wahren Anomalie φ verwendet, lässt sich der Formalismus für die elliptische Bewegung stark vereinfachen.



Für die x - und y -Komponente des Radiusvektors $\mathbf{r}$ liest man z.B. aus der Abbildung ab:

$$x = r \cos \varphi = a (\cos E - e) \quad [3.53a]$$

$$y = r \sin \varphi = a \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad [3.53b]$$

Für den Betrag von $\mathbf{r}$ lässt sich deshalb schreiben:

$$r = a (1 - e \cos E) \quad [3.54]$$

Die mittlere Winkelgeschwindigkeit auf einer elliptischen Bahn ist $2\pi/T$. Bezeichnet man mit τ den Zeitpunkt t des Periheldurchgangs, dann kann man den Winkel M vom Mittelpunkt der Sonne zur fiktiven Planetenposition P auf dem der Ellipse umschriebenen Kreis einführen. Der Vektor zu P bewegt sich dann definitionsgemäß mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit während sich die wahre Anomalie φ einer Ellipsenbahn in Sonnennähe rasch und in Sonnenferne nur langsam ändert (folgt u.a. aus dem Flächensatz).

Der Winkel M wird als mittlere Anomalie bezeichnet:

$$M = 2\pi \left(\frac{t - \tau}{T} \right) \quad [3.55]$$

Wenn die große Halbachse a und die kleine Halbachse b gegeben ist, kann man daraus die Ellipsenfläche A berechnen

$$A = \pi a b \quad [3.56]$$

Die in der Zeit $t - \tau$ überstrichene Fläche ist dann mit (3.39) und (3.55):

$$A(t) = \pi a b \left(\frac{t - \tau}{T} \right) = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{t - \tau}{T} \right) = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - e^2} M \quad [3.57]$$

Aus der Abbildung läßt sich die vom Radiusvektor $\mathbf{r}$ überstrichene Fläche aber auch aus der Differenz (Ellipsensektor O-Perihel-Planet) minus (Dreiecksfläche O-Sonne-Planet) bestimmen.

Für den Ellipsensektor gilt:

$$A_1 = E \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - e^2}$$

und für das Dreieck:

$$A_2 = e \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

so daß sich wegen $E=E(t)$

$$A(t) = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - e^2} (E - e \sin E) \quad [3.58]$$

ergibt.

Ein Vergleich zwischen (3.57) und (3.58) liefert eine Gleichung, welche die exzentrische Anomalie E mit der mittleren Anomalie M in Beziehung setzt:

$$E = M + e \sin E \quad [3.59]$$

Das ist die berühmte Keplergleichung. Sie beinhaltet den Zusammenhang zwischen der gleichmäßig dahinfließenden Zeit t (in M) und der exzentrischen Anomalie E , die den Ort des Himmelskörper auf seiner Bahnellipse bestimmt.

Durch Lösung dieser transzendenten Gleichung für einen vorgegebenen Zeitpunkt t erhält man die dazugehörige exzentrische Anomalie E , aus der sich wiederum die wahre Anomalie φ berechnen läßt.

Aus der Abbildung kann man folgende geometrische Beziehung unschwer ablesen:

$$r \cos \varphi = a (\cos E - e) \quad [3.60]$$

Löst man diese Beziehung nach r auf und setzt sie anschließend in die Polargleichung (3.37) ein, dann erhält man unter der Berücksichtigung, daß für eine Ellipse (3.39) gilt:

$$\cos \varphi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad [3.61a]$$

oder wegen (3.53b):

$$\sin \varphi = \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} \quad [3.61b]$$

Zur besseren Handhabung verwendet man anstelle von (3.61a) und (3.61b) folgende Beziehung zur Berechnung der wahren Anomalie:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad [3.62]$$

Damit ist die Funktion $\mathbf{r}(t)$ berechenbar.

Bahnbestimmung

Unter der Bahnbestimmung eines Planeten, Planetoiden oder Kometen versteht man die Ableitung ihrer Bahnelemente aus Positionsbeobachtungen. Ausgangspunkt sind die zu verschiedenen Zeiten gemessenen scheinbaren Positionen an der Himmelskugel, die nach einigen Korrekturen geozentrisch in einem Äquatorialsystem angegeben werden. Das sind aber lediglich Winkel, während die Entfernung von der Erde zumeist unbekannt ist (bei Erstbeobachtungen ist eine Parallaxenmessung i.d.R. nicht möglich). Gerade darin besteht die größte Schwierigkeit. Bei bekannter Entfernung von der Erde könnte man die Bahn aus günstig verteilten Richtungsmessungen relativ leicht ableiten, da die Erdbahn mit großer Genauigkeit bekannt ist.

Für eine erste Bestimmung der Bahnparameter geht man zweckmäßigerweise von einem Zweikörperproblem aus und vernachlässigt die von den anderen Körpern im Sonnensystem verursachten Störungen. Bei neuentdeckten Planetoiden kann man (fast) immer von einer elliptischen Bahn ausgehen, während Kometen oftmals parabelnahe Bahnen (bzw. davon nur schwer unterscheidbare Ellipsen sehr großer Exzentrizität) besitzen..

Die elliptische Bahn eines Planeten oder Planetoiden wird – wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde – durch genau 6 Parameter eindeutig bestimmt. Um diese 6 Parameter zu berechnen, benötigt man mindestens drei Winkelmessungen und die dazugehörigen Zeitpunkte. In der Regel handelt es sich dabei um jeweils drei Rektaszensions- und drei Deklinationswerte zu drei verschiedenen Beobachtungszeiten. Diese Positionsbeobachtungen sollten zeitlich nicht zu nahe beieinander liegen, damit man einen entsprechend großen Bahnbogen des Objektes zur Verfügung hat. Sie sollten jedoch auch nicht allzu weit auseinander liegen, weil sonst die Störungen – insbesondere durch die großen Planeten wie Jupiter und Saturn - zu groß werden.

Der erste Schritt ist, aus diesen Koordinaten über ein Näherungsverfahren die ungefähre Entfernung zur Erde zum Beobachtungszeitpunkt abzuschätzen. Das ist nicht allzu schwierig, da 1. die Planetenpositionen immer in einer Ebene liegen müssen, in der auch die Sonne liegt (wegen (3.23)) und 2. der Flächensatz erfüllt sein muß. Das Ergebnis einer derartigen Näherungsrechnung ist zwar am Anfang recht ungenau, läßt sich aber durch die Bestimmung von Korrekturwerten systematisch verbessern (Hypothesenrechnung) und zwar solange, bis die ermittelten Ergebnisse die beobachteten Örter in der gewünschten Genauigkeit reproduzieren. Auf diese Weise findet man die Ortsvektoren Erde-Himmelskörper für die Beobachtungszeitpunkte sowie Angaben für die dazugehörigen Geschwindigkeitsvektoren. Durch einfache Koordinatentransformationen kann man über die bekannte Lage der Erde zum Beobachtungszeitpunkt (gegeben durch die Sonnenlänge und der Entfernung zur Sonne) die Positionen in ein heliozentrisches Koordinatensystem umrechnen und daraus die elliptischen Bahnelemente eindeutig bestimmen. Dazu genügen dann bereits zwei vollständig bekannte heliozentrische Örter.

Diese Vorgehensweise kann man auf folgendes Anfangswertproblem reduzieren:

Gegeben: $t_0, \mathbf{r}_0, \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ (Laplace-Problem)

Gesucht: $i, \Omega, \omega, a, e, \tau$

- Bestimmung der Neigung i der Bahn gegen die Ekliptik und der Länge des aufsteigenden Knotens aus (3.50).
- Bestimmung der großen Halbachse a für

$$\text{a) Ellipse: } a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{G(M_\odot + m_p)} \right)^{-1} \quad (\text{folgt aus (3.45b)})$$

$$\text{b) Parabel: } a = \infty$$

- Numerische Exzentrizität (Ellipsenbahn)

$$\text{aus (3.39) } e^2 = 1 - \frac{p}{a}$$

- Berechnung der wahren Anomalie $\varphi(t_0)$

$$\text{aus (3.37) } \cos \varphi = \frac{p - r}{r e}$$

- Bestimmung der Lage der Knotenlinie und des Perihelabstands ω

$$\mathbf{K}_0 = \cos \Omega \mathbf{e}_x + \sin \Omega \mathbf{e}_y$$

$$\cos \omega = \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{A}_0$$

- Berechnung der exzentrischen Anomalie E für den Beobachtungszeitpunkt t

$$\cos E = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_0}{a} + e$$

- Perihelzeit

$$M = E - e \sin E$$

$$\tau = t_0 - M \sqrt{\frac{a^3}{G(M_\odot + m_p)}}$$

Die erste praktikable Methode zur Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen stammt von dem berühmten Göttinger Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUß (1777-1855). Es gelang ihm damit, aus den wenigen Entdeckungsbeobachtungen des Planetoiden Ceres, die sich über die ersten Januartage des Jahres 1801 verteilten, die Bahnelemente dieses von GUISEPPE PIAZZI (1746-1826) entdeckten „wandernden Sterns“ zu berechnen. Nur auf diese Weise konnte dieser Planetoid ziemlich genau ein Jahr später von dem damals sehr bekannten Astronomen FRANZ XAVER VON ZACH (1754-1832) an der von GAUß angegebenen Stelle wiederentdeckt werden. GAUß hat seine Methode zur Bahnbestimmung in dem Werk „*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*“ (1809) niedergelegt. Darin entwickelt er u.a. auch die Methode der kleinsten Quadrate, die besonders in der Fehlerrechnung und Statistik eine große Bedeutung gewonnen hat.

In der Folgezeit wurde die Gauß'sche Methode der Bahnbestimmung sukzessive verbessert und insbesondere die Störungsrechnung immer mehr verfeinert, was letztendlich zur „rechnerischen“ Entdeckung des Planeten Neptun im Jahre 1846 führte.

Gerade im 19. Jahrhundert begann eine stürmische Zeit was die Entdeckung von Planetoiden in der Lücke zwischen Mars- und Jupiterbahn betraf, so daß sich sehr viele Astronomen fast ausschließlich mit der Berechnung und Sicherung von Planetoidenbahnen beschäftigten. Grundlegende Arbeiten zu diesem Thema stammen z.B. von den deutschen Astronomen JOHANN FRANZ ENCKE (1791-1865) und PETER ANDREAS HANSEN (1795-1874). Der erstere ist noch heute durch den nach ihm benannten kurzperiodischen Kometen bekannt.

Als Letztes soll noch der aus Bremen stammende Arzt und Astronom WILHELM OLBERS (1758-1840) erwähnt werden. Von ihm stammt die Schrift (1797) „*Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen*“. Die darin beschriebene Methode, Kometenbahnen zu bestimmen, war lange Zeit sehr beliebt und wird in den Grundzügen selbst heute noch benutzt.

Heute werden Planetenbahnen ausschließlich mit Computern berechnet, wobei man – z.B. für die Berechnung interplanetarer Missionen – oftmals anstelle der Newtonschen Gesetze die allgemein-relativistische Schwarzschildmetrik als Grundlage verwendet. Außerdem gehen in die Rechnung i.d.R. mehr als drei Beobachtungen ein, so daß man die Bahnelemente mit gesteigerter Genauigkeit durch Methoden der Ausgleichsrechnung bestimmen kann. Dazu kommt noch die Berücksichtigung der Störungen der anderen Planeten des Sonnensystems, die zu einer zeitlichen Variation der Bahnelemente bis hin zu radikalen Bahnänderungen führen können.

Ephemeriden

Das Ziel der Bahnbestimmung war, die Bahnelemente eines Planeten, Planetoiden oder Kometen aus Positionsbeobachtungen abzuleiten. Der entgegengesetzte Weg, nämlich die Positionen an der Himmelskugel für einen gegebenen Zeitpunkt aus den Bahnelementen zu berechnen, nennt man Ephemeridenrechnung. Mittlerweile gibt es für diesen Zweck genügend Computerprogramme, so daß auch Amateurastronomen am heimischen Computer ohne große Schwierigkeiten Ephemeriden rechnen können. Im Folgenden sollen die grundlegenden Prinzipien erläutert werden, denen die Ephemeridenrechnung zugrunde liegt.

Das Problem ist:

Gegeben: $i, \Omega, \omega, a, e, \tau$

Gesucht: $t_n, \mathbf{r}_n$, eventuell $\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \Rightarrow \alpha, \delta$ für t_n (geozentrische Äquatorialkoordinaten)

In der Regel berechnet man die Positionen für verschiedene Zeitpunkte t_n und stellt sie z.B. tabellarisch dar oder trägt sie in eine Sternkarte ein.

Zunächst berechnet man für die gewünschten Zeitpunkte die mittlere und exzentrische Anomalie durch Lösung der Keplergleichung (3.59). Daraus kann man die wahre Anomalie und über die Kegelschnittparameter (für die Ellipse sind das a und e , siehe (3.37) und (3.39)) die Sonnenentfernung bestimmen. Damit ist die Position des Himmelskörpers im heliozentrischen (d.h. ekliptikalen) Koordinatensystem bekannt. Aus der Position der Erde zu dem gegebenen Zeitpunkt lassen sich schließlich über eine einfache Koordinatentransformation die geozentrischen Äquatorialkoordinaten ausrechnen.

Der Knackpunkt ist die Lösung der transzendenten Keplergleichung (3.59).

Bezeichnet man mit n die mittlere tägliche Bewegung eines Himmelskörpers auf seiner elliptischen

Bahn um die Sonne, dann folgt aus (3.48) mit $n = \frac{2\pi}{T}$:

$$n = \sqrt{\frac{G(M_{\odot} + m_p)}{a^3}} \quad [3.63]$$

Damit läßt sich die mittlere Anomalie M auch als Summe der mittleren Anomalie M_0 zum Zeitpunkt τ und dem Winkel, der im Zeitraum $t - \tau$ überstrichen wurde, schreiben:

$$M = M_0 + n(t - \tau)$$

Da man τ so gewählt hat, daß sich zu diesem Zeitpunkt der Himmelskörper im Perihel befindet, muß r minimal sein (das folgt aus der Polargleichung (3.37)). Es bedeutet nichts weiter als das, daß die wahre Anomalie φ und damit auch die exzentrische Anomalie E an diesem Punkt gleich 0° ist.

Deshalb gilt

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0 = 0$$

und die Keplergleichung geht in die für Ephemeridenrechnungen günstigere Form

$$n(t - \tau) = E - e \sin E \quad [3.64]$$

über. Durch Lösung dieser Gleichung für einen Zeitpunkt t erhält man E . Die einfachste Methode ist die Iteration:

$$E_{(k+1)} = n(t - \tau) + e \sin E_{(k)}, \text{ Start mit } E_{(0)} = M(t), \text{ Winkel im Bogenmaß}$$

Sie wird solange durchgeführt, bis die Differenz $|E_{(k+1)} - E_{(k)}|$ unter eine gewisse Genauigkeitsschranke ε fällt.

Das Konvergenzverhalten läßt sich verbessern, in dem man angepaßte Iterationsverfahren – wie z.B. das bekannte Newton-Rapson-Verfahren – verwendet. Außerdem wurden aufgrund der Wichtigkeit dieser Gleichung in der praktischen Astronomie eine ganze Anzahl von Lösungsverfahren entwickelt, die auch bei Exzentrizitäten $e > 0.5$ gut konvergieren.

Ist die exzentrische Anomalie E für den Zeitpunkt t bekannt, dann kann mit (3.62) die dazugehörige wahre Anomalie ausgerechnet werden. Der Betrag des Radiusvektors $\mathbf{r}(t)$ ist dann

$$r(t) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi(t)} \quad [3.65]$$

und der Ortsvektor $\mathbf{r}$ selbst (3.51e)

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \mathbf{A}_0 + r \sin \varphi \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wobei die Gauß'schen Vektoren $\mathbf{A}_0$ und $\mathbf{Q}_0$ durch (3.51c) und (3.51d) bestimmt sind.

Wie es weitergeht, soll nur kurz skizziert werden.

Die zu den heliozentrischen ekliptikalen Koordinaten (x, y, z) gehörenden Polarkoordinaten sind die ekliptikale Länge l , die ekliptikale Breite b und die Entfernung r wobei gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos b \cos l \\ r \cos b \sin l \\ r \sin b \end{pmatrix} \quad [3.66a]$$

Verschiebt man jetzt den Koordinatenursprung vom Sonnenzentrum in die Mitte der Erde, dann erhält man die geozentrischen ekliptikalen Koordinaten in kartesischer Darstellung.

Mit r_E als Abstand Erde-Sonne und mit den heliozentrischen ekliptikalen Koordinaten l_E und b_E ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos b \cos l \\ r \cos b \sin l \\ r \sin b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_E \cos b_E \cos l_E \\ r_E \cos b_E \sin l_E \\ r_E \sin b_E \end{pmatrix} \quad [3.66b]$$

Hieraus lassen sich die geozentrischen Ekliptikalkoordinaten berechnen:

$$\tan \beta = \frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}}$$

$$\tan \lambda = \frac{y_E}{x_E}$$

und die Entfernung von der Erde:

$$r_E = \sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2}$$

Als nächstes erfolgt eine Transformation in das geozentrische Äquatorialsystem unter Berücksichtigung der Schiefe der Ekliptik ε . Mit den bekannten Transformationsgleichungen

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \delta = -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

folgt für die geozentrische Rektaszension α und Deklination δ :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \lambda \cos \varepsilon - \tan \beta \sin \varepsilon}{\cos \lambda} \quad [3.67]$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

Da die Schiefe der Ekliptik aufgrund der Präzession und Nutation der Erdachse nicht konstant ist, muß sie für den Zeitpunkt t nach folgender Formel berechnet werden:

$$\varepsilon = 23^\circ.43929111 - 46''.8150T - 0''.00059T^2 + 0''.001813T^3 \quad [3.68a]$$

T ist die Anzahl der Julianischen Jahrhunderte, die seit der Epoche J2000 (1. Januar, 12 Uhr UT) vergangen sind.

Bezeichnet JD das Julianische Datum für den Zeitpunkt t, dann ist

$$T = \frac{JD - 2451545.0}{36525} \quad [3.68b]$$

Die heliozentrischen Ekliptikalkoordinaten (r_E, l_E, b_E) der Erde für den Zeitpunkt t kann man entweder einem astronomischen Jahrbuch entnehmen oder z.B. nach der Planetentheorie VSOP87 (BRETAGNON, FRANCOU 1987) berechnen.

Störungen, allgemeines und eingeschränktes Drei- und N-Körperproblem

Störungen

In unserem Sonnensystem hat man es nicht nur mit zwei gravitativ wechselwirkenden Körpern zu tun. Die Planeten beeinflussen sich gemäß (3.19) auch gegenseitig, was zu sogenannten Bahnstörungen führt. Diese Bahnstörungen führen im Laufe der Zeit zu einer Änderung der Bahnelemente, was die Berechnung einer genauen Ephemeride – z.B. für Planetoiden - ohne Berücksichtigung der Störungen quasi unmöglich macht.

Bei den Bahnstörungen unterscheidet man periodische und säkulare Störungen. Die periodischen Störungen führen zu Schwankungen um einen Mittelwert, d.h. sie gleichen sich im Mittel aus was sehr wichtig für die Stabilität des Sonnensystems ist. Säkulare Störungen sind dagegen „fortschreitend“, d.h., obwohl ihr Anteil an der Störfunktion recht klein ist, können sie sich über längere Zeiträume quasi „aufaddieren“ und damit beträchtliche Veränderungen an den Bahnelementen bewirken.

Störungen lassen sich am einfachsten durch eine Störbeschleunigung $\mathbf{a}_{st}$ beschreiben, die in Richtung Sonne zeigt und sich aus dem Kräfteparallelogramm aller auf die Punktmasse m einwirkenden Störkräfte $\mathbf{F}_i^{(st)}$ ergibt.

Sei $M_\odot$ die Sonnenmasse, m die Masse des Planeten und m_{st} die Störmasse. Die Störbeschleunigung wird maximal, wenn diese drei Massen eine Linie bilden. Setzt man die Entfernung Planet-Sonne zu r und die Entfernung Planet-Störmasse zu $R = r_{st} - r$, dann ergibt sich die Störbeschleunigung in Richtung Sonne aus der Differenz der Kraftwirkung von m_{st} auf m und von m auf $M_\odot$. In diesem Fall gilt offensichtlich:

$$\Delta a_{st} = G m_{st} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + R)^2} \right) \quad [3.71]$$

und wenn $(r < R)$, dann ist nach Entwicklung des zweiten Terms nach r und der Berücksichtigung der ersten beiden Reihenglieder:

$$\Delta a_{st} = 2G m_{st} \frac{r}{R^3} \quad [3.72]$$

Zur Charakterisierung der Störung verwendet man oft den Störfaktor σ , der folgendermaßen definiert ist:

$$\sigma = \frac{m_{st}}{M_{\odot}} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \quad [3.73]$$

Damit kann man (3.72) schreiben:

$$\Delta a_{st} = 2\sigma \frac{GM_{\odot}}{r^2} \quad [3.74]$$

Es gilt folgende Regel: Je größer der Wert von σ ist, desto größer ist der Einfluß der Störmasse m_{st} auf die Bahn des gestörten Planeten.

(3.73) erlaubt natürlich nur eine grobe qualitative Abschätzung der von den einzelnen Planeten verursachten Störungen. In der praktischen Astronomie sind die Verhältnisse bedeutend komplexer. In der Regel verwendet man zur mathematischen Behandlung konvergente Reihenentwicklungen der Störfunktionen, aus welchen man die Änderungen der Bahnelemente als Funktion der Zeit bestimmt. Dies wird als Methode der allgemeinen Störungen bezeichnet und kann immer dann angewendet werden, wenn die Störungen über einen längeren Zeitraum hinaus ($t \gg T$) sehr klein bleiben. Reihenentwicklungen für die allgemeinen Störungen sind im Wesentlichen nur für die großen Planeten bekannt.

Bei der Methode der speziellen Störungen geht man von den (exakten) Bahnelementen des gestörten und der störenden Körper aus, die sich auf eine ganz bestimmte Epoche beziehen müssen (oskulierende Elemente). Daraus berechnet man - ähnlich wie bei einer Ephemeridenrechnung - für einzelne, möglichst dicht aufeinanderfolgende Zeitpunkte aus den Positionen der Störplaneten deren Auswirkungen auf die Bahnelemente des gestörten Planeten (numerische Integration). Der Rechenaufwand für diese Methode ist sehr hoch, wird aber selbst von modernen Personalcomputern mittlerweile klaglos bewältigt.

Zum Abschluß soll noch auf eine Problemstellung hingewiesen werden, die sich aus der Identifikation von neuentdeckten periodischen Kometen ergab, deren Bahnelemente sich offensichtlich bei einem nahen Vorübergang am Jupiter stark verändert haben. Die Frage war, gibt es eine Möglichkeit, aus den Bahnelementen vor der massiven Störung und der danach eine Beziehung herzustellen, aus der sich zeigen läßt, daß beide Sätze von Bahnelementen genau dem gleichen Kometen entsprechen? Oder anders ausgedrückt, gibt es eine Größe (Invariante), die bei einer derartigen Bahnänderung unveränderlich bleibt? Die Antwort ist ja, wie FELIX TISSERAND (1845-1896) im vierten Band seiner „Himmelsmechanik“ zeigen konnte. Diese Größe wird seitdem als Tisserand-Parameter T bezeichnet.

Kennzeichnet man mit dem Index J die Parameter für Jupiter und mit dem Index c die Parameter für den Kometen, dann sollten beide Sätze von Bahnelementen ungefähr den gleichen Wert für T liefern:

$$T_J = \frac{a_J}{a_c} + 2\sqrt{\frac{p_c}{a_J} \cos i_c} \quad \text{mit} \quad p_c = (1 - e_c^2) a_c \quad [3.75]$$

Diese Beziehung wird in der Himmelsmechanik als Tisserand-Kriterium bezeichnet.

Resonanzen

Neptun benötigt 163.73 Jahre für einen Umlauf um die Sonne, Pluto 248 Jahre. Bildet man das Verhältnis der Umlaufzeiten, dann erhält man

$$\frac{T_{Pluto}}{T_{Neptun}} = 1.512$$

Also eine Zahl, die nahe bei $3/2$ liegt. Das bedeutet, wenn Pluto zwei Umläufe um die Sonne absolviert, vollendet Neptun drei. Derartige Umlaufperioden, die in einem einfachen Verhältnis (kleiner) ganzer Zahlen stehen, nennt man in der Himmelsmechanik Resonanzen:

$$\text{Resonanzverhältnis} = \frac{n}{m} \quad n, m \in G \quad [3.76]$$

Bezeichnet man mit T die Umlaufperiode des i -ten Himmelskörpers, dann kann man die Resonanzbedingung auch folgendermaßen schreiben:

$$\left| \sum_{i=1}^k \left(\frac{q_i}{T_i} \right) \right| < \varepsilon \quad q_i \in G \quad [3.77]$$

Wobei ε eine Zahl < 1 ist.

Die Ordnung der Resonanz zwischen zwei Bahnen ergibt sich als Absolutbetrag der Differenz $q_i - q_{i+1}$. Resonanzen mit $k > 2$ werden als Laplace-Resonanzen bezeichnet.

Befinden sich die Umlaufbahnen zweier Himmelskörper in Resonanz, dann können sich unter gewissen Voraussetzungen ihre Störungen verstärken. Angenommen, die stark exzentrische Bahn eines Planetoiden, dessen Bahnebene mit der Bahnebene Jupiters zusammenfällt, befindet sich in einer 2:1-Resonanz mit Jupiter. Dieser Planetoid benötigt 5.93, also ca. 6 Jahre für einen Umlauf um die Sonne. Wenn sich Jupiter und Planetoid in einer unteren Konjunktionsstellung befinden (also in der Linie Sonne – Planetoid – Jupiter), dann gibt es folgende zwei Fälle:

- a) Planetoid im Perihel, Konjunktionsabstand zu Jupiter maximal
- b) Planetoid im Aphel, Konjunktionsabstand zu Jupiter minimal

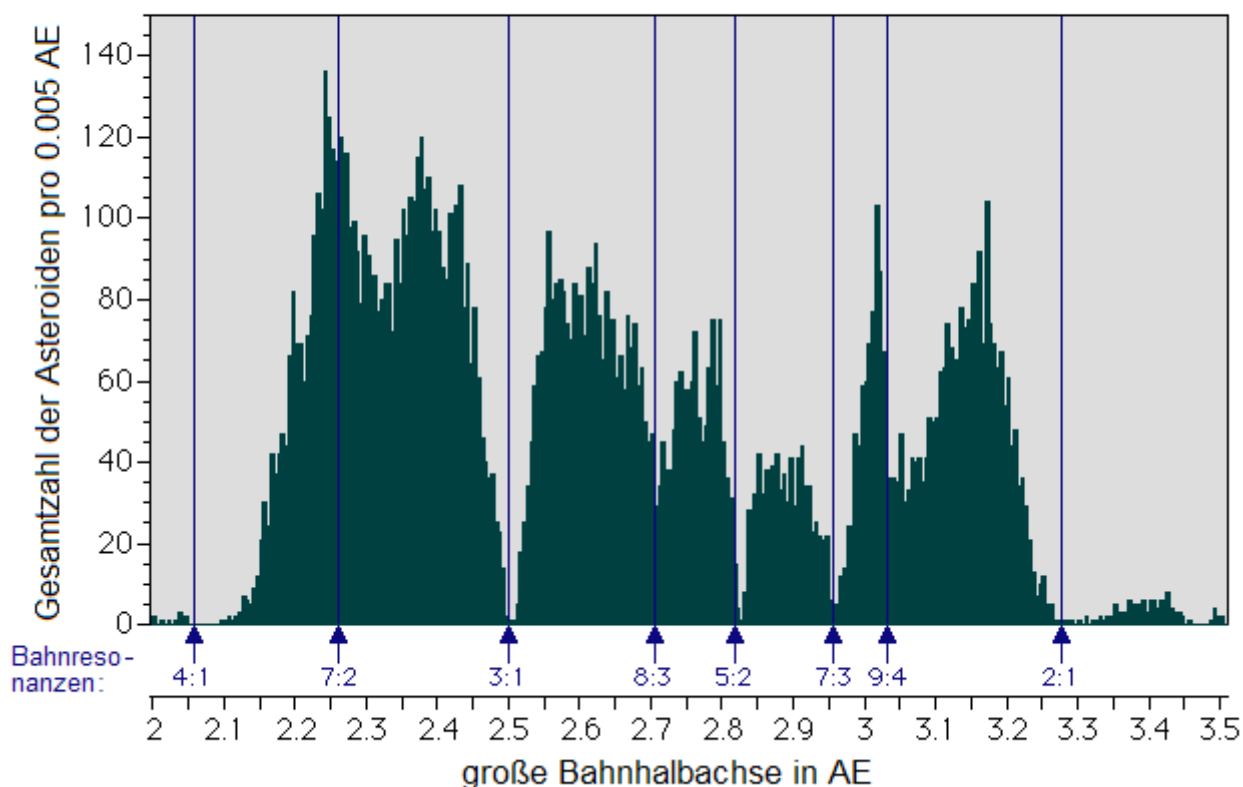
Betrachtet man a) und b) jeweils als Ausgangskonfiguration, dann erkennt man, daß sich im Fall a) Jupiter und Planetoid alle 12 Jahre immer mit einem Maximalen Konjunktionsabstand und im Fall b) immer in einem minimalen Konjunktionsabstand treffen. Das bedeutet, daß die Ausgangskonfiguration b) aufgrund der größeren Störwirkungen instabiler ist als a). Man kann deshalb erwarten, daß Jupiter im Laufe der Zeit den Planetoiden aus seiner Resonanzstellung entfernen wird.

Im Allgemeinen sind Resonanzen der ersten und zweiten Ordnung am stärksten. Resonanzen erster Ordnung führen im Wesentlichen zu einer Änderung der Bahnexzentrizität. Sie wirken sich dagegen

kaum auf die Bahnneigung aus. Resonanzen zweiter Ordnung können dagegen sowohl die Exzentrizität oder die Bahnneigung verändern.

Resonanzeffekte sind die Ursache dafür, daß sich im Asteroidengürtel sogenannten Kommensurabilitätslücken ausbilden. In diesen „Lücken“ befinden sich nur sehr wenige oder gar keine Planetoiden. Ihre Lage ist durch Resonanzen der Form 2:1, 3:1 oder 5:2 in bezug zu Jupiters Umlaufperiode gegeben. Nach ihrem Entdecker, dem amerikanischen Mathematiker DANIEL KIRKWOOD (1814-1895), werden diese Lücken Kirkwood-Lücken genannt.

Verteilung der Asteroiden des Hauptgürtels



Auch die Gaps in den Saturnringen sind auf Resonanzeffekte zurückzuführen.

Roche-Grenze

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz (3.3) nimmt die Schwerkraft mit dem Quadrat der Entfernung ab. Das führt dazu, daß auf die Vorder- und Rückseite eines ausgedehnten Körpers (z.B. Mond) im Schwerfeld eines Planeten (oder Sterns) unterschiedliche Kräfte wirken. Der französische Astronom und Mathematiker EDOUARD ROCHE (1820-1883) erkannte, daß diese Gezeitenkräfte innerhalb einer bestimmten Entfernung zu einem massereichen Hauptkörper zwangsläufig zur Zerstörung eines dort umlaufenden Kleinkörpers führen müssen. Dieser Grenzabstand, innerhalb dessen ein Mond nicht stabil sein kann, wird seitdem als Roche-Grenze bezeichnet. Die Ergebnisse ROCHE's und seiner Nachfolger haben eine große Bedeutung in der Astrophysik. Das betrifft die

Dynamik von Ringsystemen um Planeten, die Erforschung enger Doppelsterne sowie die Untersuchung von Akkretionsmechanismen z.B. im Bereich von Schwarzer Löchern oder kataklysmischen Veränderlichen.

Angenommen, wir haben zwei kugelförmige Massen m_1 und m_2 mit dem Abstand s , die in radialer Richtung in bezug auf die sehr viel größere Masse M (Entfernung d zum Schwerpunkt von m_1 und m_2) in Kontakt sind. Weiterhin wird angenommen, daß $m_1 = m_2 = m$ ist und diese beiden Massen die jeweilige Masse einer Hemisphäre (Halbkugel) z.B. eines Mondes modellieren.

In diesem Fall ist nach (3.3) die Kraft zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 (d.h. die Eigengravitation des Mondes):

$$F_{1\leftrightarrow 2} = G \frac{m^2}{(2s)^2} \quad [3.78]$$

Die Gezeitenwirkung, die von der großen Masse M ausgeht (z.B. dem Planeten, den der Mond umläuft), wirkt von außen auf diese beiden Teilmassen mit den Kräften

$$F_{M\leftrightarrow 1} = 2G \frac{M m}{(2d - s)^2} \quad [3.79]$$

$$F_{M\leftrightarrow 2} = 2G \frac{M m}{(2d + s)^2} \quad [3.80]$$

Wenn die Differenz der Gezeitenkräfte die Eigengravitation des Mondes übersteigt, dann kann der kleinere Körper nicht mehr im Außenfeld der Masse M existieren, er zerbröselt...

D.h. es gilt

$$F_{1\leftrightarrow 2} > F_{M\leftrightarrow 1} - F_{M\leftrightarrow 2} \quad [3.81]$$

woraus die Stabilitätsbedingung

$$\frac{m}{M} > 4 \left(\frac{s}{d} \right)^3 \quad [3.82]$$

folgt.

Ersetzt man Massen und Radien durch die jeweiligen Dichten, dann erhält man das Stabilitätskriterium von ROCHE (1850):

$$\frac{d}{R_{Pl}} > 1.6 \left(\frac{\rho_{Pl}}{\rho_{Mond}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad [3.83]$$

Eine exaktere Ableitung ergibt für den Faktor einen Wert von 2.44 (statt 1.6) unter der Voraussetzung, daß der Mond hauptsächlich durch die Eigengravitation zusammengehalten wird und eine gebundene Rotation ausführt. Bei rotierenden Monden müssen in der Rechnung noch die dabei auftretenden Zentrifugalkräfte (welche die Eigengravitation vermindern) mit berücksichtigt werden.

Die allgemeine Aussage von (3.83) ist, daß ein Mond mit der gleichen Dichte wie der Planet, den er umläuft, diesen nicht näher als 2.44 Planetenradien kommen darf, wenn er von den Gezeitenkräften nicht zerrissen werden will.

Bei sehr kleinen Körpern reichen die Gezeitenkräfte nicht aus, um die Zugfestigkeit des Materials, aus dem sie bestehen, zu überwinden. Deshalb können sich sehr kleine Satelliten durchaus innerhalb ihrer Roche-Grenze bewegen, was man z.B. an den sogenannten Shepherd-Monde (Durchmesser < 20 km) des Saturns sehr gut beobachten kann.

Drei – und n-Körperproblem

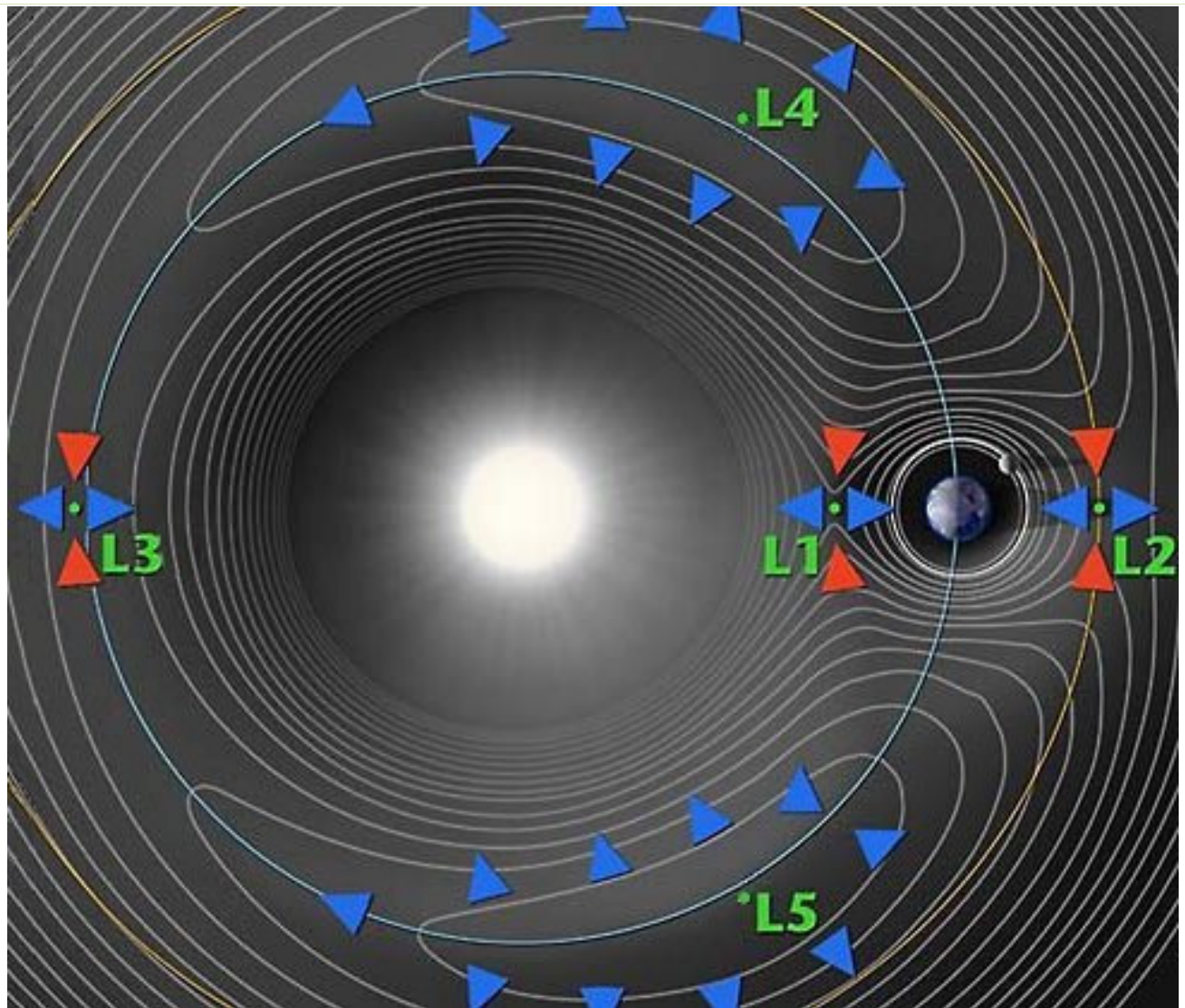
Die mathematische Behandlung von Störungen führt zwangsläufig zu der Frage, ob es analytische Lösungen des sogenannten n-Körperproblems gibt. Darunter versteht man nach LAPLACE (1749-1827) die Bestimmung der Trajektorien der N Punktmassen, die sich im Einklang mit den Newtonschen Gesetzen unter dem Einfluß ihres eigenen Gravitationsfeldes bewegen. Schreibt man für N Körper die Bewegungsgleichungen (3.1) auf

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{k=1}^N m_i m_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{r_{ik}^3} \quad [3.84]$$

mit $\mathbf{r}_i$ = Vektor von der Masse m_i zum Schwerpunkt S des Punktmassensystems und r_{ik} = euklidischer Abstand zwischen den Punktmassen i und k, dann erhält man 3N Differentialgleichungen 2.Ordnung. Um diese zu lösen, sind genau 6N Integrationen notwendig. Diese Integrationen führen zur Schwerpunkterhaltung (d.h. S bewegt sich nach dem Trägheitsgesetz), zur Erhaltung des Drehimpulses (Flächensatz) und zur Energieerhaltung, also insgesamt 10 Integrale. Der französische Mathematiker HENRY POINCARÉ (1854-1912) entdeckte, daß es keine weiteren Integrale dieses Typs mehr geben kann und damit das N-Körperproblem mit $N > 3$ algebraisch nicht lösbar ist (für den Fall $N=3$ gibt es unter bestimmten Voraussetzungen ein paar spezielle, von LAGRANGE (1736-1813) gefundene Lösungen, die zu den sogenannten Librationsbahnen führen, s.u.). Mehr noch, er wurde durch diese Untersuchungen sogar zu einem Pionier der modernen Chaostheorie da er zeigen konnte, daß unter gewissen Voraussetzungen mechanische Systeme zu chaotischen – strenggenommen zwar determinierten – aber praktisch nicht vorhersagbaren Verhalten führen. Das gilt auch für Planetenbahnen unter dem Einfluß mehrerer gravitierender Körper.

Setzt man in (3.83) $N=3$, dann erhält man das allgemeine Dreikörperproblem. Zur Vereinfachung wählt man ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im Schwerpunkt S der drei Punktmassen liegt. Dann vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (3.84) und sind leichter zu lösen.

Eine spezielle Form des Dreikörperproblems wurde 1772 von LAGRANGE im Detail untersucht und wird seitdem als Lagrange'scher Spezialfall (oder eingeschränktes Dreikörperproblem) bezeichnet. M_1 und M_2 sind zwei Punktmassen, die sich entsprechend dem Zweikörperproblem um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S bewegen, und m eine Testmasse, die klein ist im Vergleich zu M_1 und M_2 . Ziel ist es, Raumpunkte zu finden, wo Kräftegleichgewicht in bezug auf m herrscht. Die Kräfte, die zu berücksichtigen sind, sind die Gravitationskräfte zwischen den Massepunkten und die Zentrifugalkraft aufgrund der Bewegung der drei Massen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S. Die gesuchten Raumpunkte bezeichnet man deshalb auch als Librationspunkte (von lat. *Libra* – Waage). Populärer ist jedoch die Bezeichnung Lagrange-Punkte.



Lage der Lagrangepunkte L1 bis L5 (dargestellt im effektiven Potential) im System Sonne-Erde

Die Kraft $\mathbf{F}$, die in Richtung von $\mathbf{r}$ auf m wirkt, ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{F}(t) = m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = -GM_1 m \frac{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_1|^3} - GM_2 m \frac{(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_2|^3} \quad [3.85]$$

Lösungen dieser Differentialgleichungen, welche die relative Position der Punktmassen M_1, M_2 und m unverändert lassen, ergeben die gesuchten Gleichgewichtspunkte.

Um die Relativbewegung der beiden großen Massen auszuschalten, wird ein Koordinatensystem mit dem Zentrum S gewählt, dessen z -Achse in Richtung des Bahndrehimpulses von m zeigt und dessen x -Achse durch die beiden Massenmittelpunkte von M_1 und M_2 geht. Die Vektoren, die vom Schwerpunkt S in Richtung von M_1, M_2 , m und ω ausgehen (mit R als Abstand der beiden Massen M_1 und M_2), sehen in diesem mitrotierenden Koordinatensystem folgendermaßen aus:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad [3.86a, b]$$

und (wegen S als Schwerpunkt)

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} R \mathbf{e}_x \quad [3.86c]$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} R \mathbf{e}_x \quad [3.86d]$$

In bezug auf m bildet dieses Koordinatensystem ein Nichtinertialsystem was dazu führt, daß Scheinkräfte auftreten. Die Winkelgeschwindigkeit ω ist gemäß dem zweiten Keplerschen Gesetz (3.48)

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{R^3} \quad [3.87]$$

Laut Definition gilt das Newtonsche Grundgesetz (3.1) nur in Inertialsystemen. Beim Übergang in das rotierende Bezugssystem transformiert sich bekanntermaßen ein Ortsvektor wie

$$\frac{d\mathbf{r}_I}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad [3.88]$$

wobei I das Inertialsystem indiziert. Den Vektor $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ bezeichnet man als Rotationsgeschwindigkeit.

Differentiation von (3.88) nach der Zeit liefert die Beschleunigungen:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_I}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad [3.89]$$

Der erste Term ist die Radialbeschleunigung, der zweite Term die lineare Beschleunigung, der dritte Term die Coriolisbeschleunigung und der vierte Term die Zentripetalbeschleunigung.

Wendet man diese Transformation auf (3.85) an, dann erhält man:

$$\mathbf{F}_\omega = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -GM_1 m \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - GM_2 m \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} - 2m \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad [3.90]$$

Da m im Gleichgewichtspunkt mit dem Koordinatensystem mitrotiert, $\mathbf{r}$ demnach darin seine Richtung beibehält, kann der geschwindigkeitsabhängige Term vernachlässigt werden.

In Koordinatenschreibweise unter Ausnutzung von (3.86) ergibt sich dann (m=1 gesetzt):

$$\mathbf{F}_\omega = \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{x - \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(x + \frac{M_2}{M_1 + M_2} R \right) R^3}{\left(\sqrt{\left(x + \frac{M_2}{M_1 + M_2} R \right)^2 + y^2} \right)^3} - \frac{\frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(x - \frac{M_1}{M_1 + M_2} R \right) R^3}{\left(\sqrt{\left(x - \frac{M_1}{M_1 + M_2} R \right)^2 + y^2} \right)^3} \\ \frac{y - \frac{M_1}{M_1 + M_2} y R^3}{\left(\sqrt{\left(x + \frac{M_2}{M_1 + M_2} R \right)^2 + y^2} \right)^3} - \frac{\frac{M_2}{M_1 + M_2} y R^3}{\left(\sqrt{\left(x - \frac{M_1}{M_1 + M_2} R \right)^2 + y^2} \right)^3} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad [3.91]$$

Die Lösung der Gleichung $\mathbf{F}_\omega = 0$ liefert die gewünschten Stabilitätspunkte. Nach einer zwar elementaren, aber trotzdem relativ schwierigen Rechnung erhält man folgende 5 Punkte, bei denen Gleichgewicht zwischen der durch die Gravitation der beiden Massen verursachten Anziehung und der durch die Bewegung von m um den Schwerpunkt S resultierenden Zentrifugalkraft besteht:

$$\mathbf{L1} = \begin{pmatrix} R \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{3} \frac{M_2}{M_1 + M_2}} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L2} = \begin{pmatrix} R \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{3} \frac{M_2}{M_1 + M_2}} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad [3.92a, b]$$

$$\mathbf{L3} = \begin{pmatrix} -R \left(1 + \frac{5}{12} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L4} = \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad [3.92c, d]$$

$$\mathbf{L5} = \begin{pmatrix} \frac{R}{2} \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad [3.92e]$$

Die drei ersten Lagrangepunkte liegen in einer Linie mit S , M_1 und M_2 , wobei die Abstände durch das Verhältnis der beiden Hauptmassen bestimmt sind. Die Punkte L_4 und L_5 bilden dagegen mit M_1 und M_2 ein gleichseitiges Dreieck. Vom Inertialsystem aus betrachtet, bewegen sich die Massen und die Punkte L_1 bis L_5 quasi starr um den Schwerpunkt S . Die Frage ist, wie sich die Masse m verhält, wenn sie sich a) genau im Librationspunkt aufhält oder b) in deren unmittelbaren Nähe. Sind die daraus resultierenden Bahnen über längere Zeiträume stabil oder instabil?

Berechnet man für die Kraft (3.90) das sogenannte Jacobi-Potential (effektives Potential), dann lassen sich über die Eigenschaften der lokalen Extrema der Potentialfläche Aussagen über die Stabilität der Bahnen in ihrer Nähe treffen. Das reicht aber nicht aus, da man – im Gegensatz zur Ableitung der Positionen der Stabilitätspunkte – hier auch den geschwindigkeitsabhängigen Term im effektiven Potential zu berücksichtigen hat. Es zeigt sich, daß die Punkte L_1 bis L_3 Sattelpunkte sind was bedeutet, daß sie nur instabile Bahnen zulassen. Parkt man z.B. einen künstlichen Satelliten in einen derartigen Punkt, dann wird er ohne Kurskorrekturen im Laufe der Zeit zwangsläufig herauswandern. Ein Beispiel ist z.B. der zur Erforschung der Sonne dienende Forschungssatellit SOHO der NASA, der sich gegenwärtig im Punkt L_1 des Systems Erde-Sonne befindet. Die mittlere Verweildauer liegt für die Punkte L_1 und L_2 im Erde-Sonne-System in der Größenordnung von Monaten, für den Punkt L_3 (hier handelt es sich um einen schwachen Sattelpunkt) in der Größenordnung von einigen Jahrhunderten.

Die Punkte L_3 und L_4 sind dagegen lokale Maxima. Man erwartet, daß sie instabil sind. Überraschenderweise ist das jedoch nicht der Fall. Sie erweisen sich sogar als hochgradig stabil. Der Grund dafür liegt in der Corioliskraft. Wenn die Masse m den Potentialberg „herabrollt“ gewinnt sie an Geschwindigkeit und die Coriolisbeschleunigung krümmt ihre Bahn um den Librationspunkt herum. Auf diese Weise entstehen meist rautenartig geformte Bahnen (vom mitrotierenden Bezugssystem aus betrachtet), die – zumindest bei den Massenverhältnissen des Sonnensystems – über sehr lange Zeiträume stabil sind (man kann zeigen, daß in diesen Fall für die beiden Hauptmassen ungefähr $M_1 < 25 M_2$ gelten muß).

Daß die Lagrangepunkte nicht nur theoretische Bedeutung haben zeigt die Entdeckung des Planetoiden 588 Achilles im Jahre 1906 durch MAX WOLF (1863-1932) in Heidelberg (genaugenommen wurde bereits 1904 der erste Trojaner durch EDWARD EMERSON BARNARD (1857-1923) gefunden, was aber erst bei der Nachrechnung alter Positionsbestimmungen 1999 auffiel). Wie sich später herausstellte, handelt es sich dabei um einen Vertreter einer artenreichen Gruppe von Planetoiden, die sich um die Lagrangepunkte L_4 und L_5 des Jupiter-Sonne-System scharen. Die Mitglieder der Gruppe, die Jupiter um ca. 60° vorausseilen, bezeichnet man als Achillesgruppe. Die andere Gruppe hat den Namen Patroclusgruppe erhalten. Ihr Zentrum bildet L_5 . Es hat sich eingebürgert, Planetoiden, die periodische Bewegungen um einen Librationspunkt ausführen, ganz allgemein als Trojaner zu bezeichnen. Für die Nomenklatur gilt, daß alle Planetoiden im Bereich um L_4 nach griechischen Helden aus dem Trojanischen Krieg benannt werden, wie sie HOMER in seiner Ilias überliefert hat. Die Planetoiden, die zu L_5 gehören, haben im Gegensatz alle Namen von Helden, die auf Seite Trojas um die schöne Helena gekämpft haben. Eine besonders exotische Gruppe sind die sogenannten „springenden Trojaner“, die zwischen L_4 und L_5 hin und her springen können. Das bekannteste Beispiel ist 1868 Thersites.

Die Planetoiden der Trojaner-Gruppe bewegen sich im Bereich der Librationspunkte L4 und L5 von Jupiter

Trojaner findet man nicht nur auf der Jupiterbahn. Auch Erde (z.B. 3753 Cruithne) und Mars besitzen in ihren Librationspunkten einige Trojaner.

Planet	Librationspunkt	Anzahl
Erde	-	2
Mars	L4	1
Mars	L5	3
Jupiter	L4	1260
Jupiter	L5	1084
Neptun	-	6

(haben eigentlich „hufeisenförmige“ koorbitale Bahnen)

Stand März 2008

In den quasistabilen Librationspunkten kann sich auch grobkörnige und staubförmige Materie ansammeln, wie die Entdeckung der „Staubmonde“ der Erde durch den polnischen Astronomen KAZIMIERZ KORDYLESKY (1903-1981) 1956 zeigen. Mittlerweise konnten die visuellen Sichtungen der am Himmel ca. 4° großen (extrem schwachen) Erhellungen durch das *Orbiting Solar Observatory* (OSO) –6 bei $\lambda = 500 \text{ nm}$ bestätigt werden (1975).

Eine besonders große Bedeutung haben die Librationspunkte für die unbemannte Raumfahrt. Nach den guten Erfahrungen mit der in L1 stationierten Sonnensonde SOHO erwägt man auch den Nachfolger des Hubble-Space-Teleskops (*James Webb Space Telescope*, JWST) in einem Librationspunkt - und zwar L2 - von Erde und Sonne zu parken.

Die Lage des Librationspunktes L1 im System Erde-Mond-Sonne kennzeichnet auch den Bereich, wo sich die gravitativen Kräfte zwischen Erde-Mond und Sonne genau ausgleichen. Außerhalb der Entfernung von L1 überwiegt der Einfluß der Sonne, innerhalb der des Erde-Mond-Systems. Oder anders ausgedrückt, um jeden Planeten gibt es eine Sphäre mit einer Grenzfläche A, innerhalb dessen die Gravitationsanziehung des Planeten und außerhalb dessen die Gravitationsanziehung der Sonne überwiegt. Damit ein Körper z.B. die Einflußsphäre der Erde verlassen kann, muß er durch Energiezufuhr beschleunigt werden. Durchstößt er dabei diese Sphäre, dann gelangt er in den Einflußbereich der Sonne. Die Grenzfläche A wird als Hill'sche Grenzfläche bezeichnet (nach GEORGE WILLIAM HILL, 1838-1914)). Ihr Radius ist für einen Planeten der Masse m und der Entfernung l von der Sonne (Masse $M_\odot$) durch folgende Beziehung gegeben:

$$R_{\text{Hill}} = \left(\frac{m}{3M_\odot} \right)^{\frac{1}{3}} l \quad [3.93]$$

Bewegt sich ein Himmelskörper innerhalb der Hill-Sphäre eines Planeten, dann bezeichnet man ihn als „Mond“, bewegt er sich ausschließlich im Einflußbereich der Sonne, dann ist er ein Planetoid

oder ein periodischer Komet. Diese Objekte können sich nur innerhalb der Hill-Sphäre des jeweils dominierenden Himmelskörpers bewegen. Für Kometen mit parabolischen Geschwindigkeiten gibt es dagegen keine Einschränkungen in ihrer Bewegungsfreiheit.

Die Ausdehnung der Hill-Sphären ist wesentlich für die Stabilität des Sonnensystems. Wie das Ergebnis der Übungsaufgabe zeigt, überstreichen die Hill-Sphären der großen Planeten bei ihrem Umlauf um die Sonne große Raumbereiche, d.h. Planetenbahnen sind nur dann einigermaßen stabil, wenn sich ihre Einflußbereiche nicht überschneiden. Genauere Rechnungen haben als Stabilitätskriterium ergeben, daß erst ein Abstand von 3-4 R_{Hill} zwischen zwei Planeten die gegenseitigen Störungen soweit herunterdrückt, daß sich ihre Bahnen über mehrere Milliarden Jahre nicht wesentlich ändern. Bei Systemen aus mehreren großen Planeten scheint als Stabilitätsabstand sogar ein Wert von 13-15 R_{Hill} notwendig zu sein.

Die massenreichen Riesen- und Großplaneten im äußeren Sonnensystem haben im Gegensatz zu den inneren Planeten sehr große Hill-Sphären. Das erklärt auch, warum diese Planeten ausgedehnte Satellitensysteme besitzen.

Halobahnen und Bumerang-Effekt: Die Flugbahn der Raumsonde Genesis

Am 8. September 2004 konnte man im Fernseher – so man wollte und Zeit hatte – die spektakuläre Landung der NASA-Sonde Genesis mit verfolgen. Die Wiedereintrittskapsel sollte langsam an einem Gleitschirm zur Erde schweben, aber noch vor der Landung auf dem Boden mittels eines Hubschraubers und einem daran befestigten Hakens eingefangen werden. Nur leider war ein Schalter, dessen Preis weniger als ein ca. 250 Millionstel der Missionskosten betrug, defekt oder falsch eingebaut, so daß die Sonde mit ca. 300 km/h in den mehr oder weniger weichen Wüstenboden des Bundesstaates Utah aufschlug. Trotzdem nahm die 260 Millionen € teure Mission ein doch nicht ganz so unglückliches Ende. Die Kollektoren mit dem eingesammelten „Sonnenstaub“ konnten zum größten Teil geborgen werden. Hier soll aber nicht die dramatische Landung interessieren, sondern die Flugbahn, welche die Sonde zwischen ihrem Start am 8. August 2001 und dem unsanften Niedergang der Landekapsel zurück-gelegt hat.

Nach dem Start brauchte Genesis knapp 3 Monate, um eine sogenannte Halobahn um den Lagrangeunkt L1 zu erreichen. Halobahnen sind ringförmige Bahnen (von der Erde aus gesehen) mit z.T. beträchtlichen Ausmaßen. Typisch für Bahnen um L1 sind Bahnradien in der Größenordnung des Durchmessers der Mondbahn und Umlaufzeiten von ca. 6 Monaten. Im Gegensatz zu Kepler-Bahnen verlaufen sie nicht in einer Ebene und sind auch räumlich stark gekrümmt. Man kann sie nur mit numerischen Verfahren mit der nötigen Genauigkeit berechnen.

Von der Sonne aus gesehen ist die Bahn weniger spektakulär. Der Satellit wandert weitgehend synchron mit der Erde und schwankt lediglich mit einer sinusförmigen Schwingungsbewegung mit etwa 2 Perioden pro Jahr um den Gleichgewichtspunkt.

Die Bahn von Genesis führte zunächst in eine Halobahn um L1, den sie fünfmal umrundete um dann ohne eine zusätzliche Bahnkorrektur zum Lagrangepunkt auf der anderen Seite der Erde (L3) zu wechseln. Von dort aus kehrte sie zur Erde zurück, um die Kapsel mit den Proben abzuwerfen. Jetzt befindet sie sich wieder auf einer Halobahn um L1.

Interessanterweise – und diese Entdeckung geht auf MARTIN LO von der NASA zurück – lassen sich unter Ausnutzung der Lagrangepunkte Bahnen berechnen, die ohne weiteren Treibstoffeinsatz wieder einen Rückflug zur Erde ermöglichen. Man spricht in diesem Fall von einem „Bumerang-Verhalten“. Unter Himmelsmechanikern bildet die Menge aller möglichen Bahnen, die den Bumerang-Effekt ausnutzen, den „interplanetary Superhighway“.

Deterministisches Chaos

Die näherungsweise numerische Lösung des Differentialgleichungssystems (3.75) gelingt auch für große N durch den Einsatz von Computern relativ leicht. Auf diese Weise können z.B. nicht nur die Bahnen künstlicher Satelliten, die Bahnen von Planetoiden und Kometen, sondern sogar ganzer Sternhaufen bis hin zu wechselwirkenden Galaxien berechnet werden. In den letzten Jahrzehnten hat besonders die Untersuchung chaotischer Bahnen bzw. der Übergang zu chaotischen Bahnen bemerkenswerte Fortschritte erzielt. Man weiß mittlerweile, dass gravitierende Punktmassensysteme mit $N > 2$ auf lange Sicht gesehen ein chaotisches Verhalten zeigen, d.h. kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen des Anfangswertproblems (3.75) führen im Laufe der Zeit zu Bahnen, die sich nicht mehr vorhersagen lassen. Man hat es hier mit einem typischen Fall des „deterministischen Chaos“ zu tun, der – etwas volkstümlich – unter dem Begriff „Schmetterlingseffekt“ populär geworden ist. Eine spannende Frage in diesem Zusammenhang ist, ob unser Sonnensystem mit seinen 9 großen Planeten und Milliarden von Kleinkörpern über lange Sicht hinweg stabil ist. Um 1800 wurde diese Frage noch eindeutig mit „ja“ beantwortet. Knapp 100 Jahre später – seit POINCARÉ – ist man sich da schon nicht mehr so sicher. Heute weiß man, daß auch unser gesamtes Planetensystem in der Größenordnung von einigen Milliarden Jahren chaotisches Verhalten zeigt. Insbesondere die Bahnexzentrizität der großen Planeten ist in dieser Hinsicht anfällig. Kurzfristig (d.h. bei Zeitskalen von einigen 100 Millionen Jahren) führen Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen (z.B. in den Ortskoordinaten) lediglich zu einer Vorhersageungenauigkeit. Bei der Erde bedeutet das, daß eine „Ortsunschärfe“ von $\Delta x \sim 15$ Meter sich im Laufe von 150 Millionen Jahren zu einer Positionsunsicherheit von über 150 Millionen Kilometern entwickelt. Die Bahnform und Lage bleibt dabei weitgehend erhalten und stabil. Man spricht hier von einem „Schwachen Chaos“.

Anders sieht das bei Merkur und Pluto aus. Von allen Planeten ist Merkur dem Chaos am stärksten ausgeliefert und kann deshalb am ehesten seine momentane Bahn um die Sonne verlassen. Computersimulationen zeigen, daß sich die Exzentrizität der Merkurbahn in einigen Milliarden Jahren relativ rasch – dann innerhalb von Jahrtausenden – von 0,6 auf 0,9 erhöhen wird. Das bedeutet, Merkur kann sich der Venus bedrohlich nähern, was wiederum Auswirkungen auf die Venusbahn hat. Beispiele für entsprechende Bahnen konnten von JACQUES LASKAR berechnet werden. Es ist sogar möglich, wenn auch weitgehend unwahrscheinlich, daß Merkur irgendwann in den nächsten fünf Milliarden Jahren bei einem nahen Vorbeigang an der Venus aus dem Sonnensystem herausgeschleudert wird (was im Übrigen einen positiven Einfluß auf die Titius-Bodesche Reihe hätte ;-).

Aber auch etwas anderes ist sicher. Innerhalb der nächsten 500000 Jahren wird die Bahnexzentrizität der Erde auf 0.06 anwachsen (gegenwärtiger Wert: 0.017). Das führt dazu, daß die Intensität der Sonneneinstrahlung zwischen Aphel und Perihel um bis zu 20% schwanken wird – mit nachhaltigen, im Detail nicht vorhersagbaren Auswirkungen für das globale Erdklima. In diesem Zusammenhang soll noch erwähnt werden, daß für die relative Stabilität der Bahnen der inneren Planeten im hohen Maße die Riesenplaneten Jupiter und Saturn als „Ordnungsmächte“ verantwortlich sind. Ohne diese beiden Planeten führten die Störungen des Mars über kurz oder lang zu für das Leben auf der Erde dramatischen Änderungen der Bahnelemente.

Für die schon seit ca. 4 Milliarden Jahren anhaltende Quasi-Stabilität des Sonnensystems ist zu einem wesentlichen Anteil der Planet Jupiter verantwortlich. Massereiche Planeten in größeren Entfernungen vom Zentralstern stabilisieren masseärmere Körper in deren inneren Teil. Das ist eine wichtige Erkenntnis zur Beantwortung der Frage, ob und unter welchen Bedingungen extrasolare Planetensysteme Planeten besitzen können, auf denen die Entstehung und Entwicklung von Leben möglich ist.

Das KAM-Theorem und die Stabilität der Planetenbahnen

Schon der berühmte französische Mathematiker HENRY POINCARÉ erkannte, daß bei bestimmten mechanischen Systemen bereits winzige Änderungen in den Anfangsbedingungen genügen, um im zeitlichen Verlauf zu nicht mehr vorhersagbaren Ergebnissen zu führen. Heute hat sich für dieses Phänomen der Begriff des „Deterministischen Chaos“ eingebürgert. Danach kann es unmöglich sein, das zukünftige Verhalten eines mechanischen Systems auch dann vorauszuberechnen, wenn alle Gesetze, die dieses Verhalten bestimmen, exakt bekannt sind. Diese Erkenntnis machte es sehr schwierig, verlässliche Aussagen über das Verhalten des Sonnensystems über sehr große Zeiträume hinweg zu gewinnen. Erst ein Ergebnis der reinen Mathematik, welches nach den Anfangsbuchstaben ihrer „Entdecker“ als KAM-Theorem (Kolmogorov-Arnold-Moser) bezeichnet wird, hat etwas Licht in das Zeitverhalten dynamischer Systeme gebracht (ANDREI N. KOLMOGOROW (1903-1987), VLADIMIR I. ARNOLD, JÜRGEN MOSER (1928-1999))

Ausgangspunkt ist ein System von Punktmassen m_i , welches sich gemäß der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (d.h. unter den Einschränkungen, die durch Kräfte und Erhaltungssätze gegeben sind) zeitlich entwickelt. Da ein Hamilton'sches System durch einen Satz von verallgemeinerten Koordinaten q_i und verallgemeinerten Impulsen p_i für einen gegebenen Zeitpunkt t eindeutig beschrieben ist, kann man deren Entwicklung in der Zeit durch Verfolgung der Trajektorie $(q_1(t) \dots q_i(t), p_1(t) \dots p_i(t))$ in einem abstrakten, durch die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse aufgespannten Raum verfolgen. Solch ein Raum wird als Phasenraum bezeichnet. Man kann zeigen, daß sich die Trajektorien von periodischen oder nahezu periodischen Bewegungen im Phasenraum auf einem sogenannten invarianten Tori (dem mehrdimensionalen Analogon eines gewöhnlichen Torus mit einem Loch in der Mitte) beschränken. Anschaulich kann man sich vorstellen, daß derartige Trajektorien sich spiralförmig um solch einen Torus herum winden. So führen z.B. die Bahnen von Planeten, die untereinander gravitativ wechselwirken, im Orts-Impuls-Phasenraum zu einem Grenztorus. Die zeitliche Entwicklung der Bewegung eines Planeten wird durch genau einen spiralförmigen Umlauf um diesen Grenztorus beschrieben. Betrachtet man der Einfachheit halber nur zwei Planeten im Gravitationsfeld der Sonne, dann gibt es folgende Möglichkeiten:

a) Die Verhältnisse der Umlaufzeiten dieser Planeten sind ein rationales Verhältnis (kleiner) ganzer Zahlen wie z.B. 2:1, 3:2, 7:2 usw. Man spricht in diesem Fall von Resonanzen. Bei einer 2:1-Resonanz bewegt sich z.B. ein Planetoid genau 2-mal um die Sonne wenn sich Jupiter einmal um die Sonne bewegt. Im Phasenraum bedeutet dieser Fall, daß nach genau n Umläufen um den Grenztorus die Bahn wieder deckungsgleich ist. Bei einer derartigen Bahn wird im Laufe der Zeit der Grenztorus vernichtet und es bildet sich ein neuer Grenztorus aus, der durch den Fall b) festgelegt wird:

b) Die Verhältnisse der Umlaufzeiten zweier Planeten sind näherungsweise ein Verhältnis einer irrationalen Zahl zu einer ganzen Zahl, z.B. $\sqrt{2}:1$; $\sqrt{3}:2$ oder $\pi:2$. In diesem Fall erreicht eine Trajektorie, die sich um den Grenztorus windet, niemals wieder Deckungsgleichheit, d.h. die Bahnen sind (absolut) stabil. Die diesbezügliche Grundaussage des KAM-Theorems kann in diesem Fall folgendermaßen formuliert werden: Unter der Einwirkung von Störkräften bleiben nur solche Bahnen über lange Zeiträume erhalten, die sich in einem „hinreichend“ irrationalen

Frequenzverhältnis zur Störungsquelle befinden. Es gilt, je „runder“ der Bruch ist, der das Frequenzverhältnis darstellt, desto breiter ist der Bereich, innerhalb dem sich keine stabilen Bahnen halten können. Bei 1:2 ist er am größten, dann kommt 1:3, dann 1:4 etc. Man kann das übrigens sehr schön in der Verteilung der Planetoiden im Planetoidengürtel zwischen der Mars- und Jupiterbahn beobachten. Auch die Lücken im Saturnring haben ihre Ursache in solchen Resonanzphänomenen. Das KAM-Theorem quantifiziert derartiges dynamisches Verhalten und erlaubt deshalb genaue theoretische Vorhersagen über die dynamische Stabilität von komplexen mechanischen Systemen. Wie bereits erwähnt, zeigt das Sonnensystem in der Größenordnung von 10^9 Jahren ein schwaches chaotisches Verhalten. Die Planetoidengürtel sind langfristig instabil und dünnen sich (z.B. durch „Zerbröselung“ und den Yarkowsky-Effekt) langsam aus. Die Ringsysteme um die großen Planeten sind nur einige 10^7 Jahre stabil, d.h. daß das Ringmaterial ständig nachgeliefert werden muß.

Virialsatz

Im Folgenden soll ein System aus N Punktmassen, die gravitativ gebunden sind, betrachtet werden. Die zeitliche Entwicklung dieses Systems erhält man durch Integration der Bewegungsgleichungen (3.75):

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{i \neq k} m_i m_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{r_{ik}^3} \quad [> 3.84]$$

Multipliziert man die linke Seite skalar mit $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ und summiert über alle N Punktmassen, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{r_i^2}{2} \right) - \left(\frac{dr_i}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N \frac{m_i r_i^2}{2} - \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{dr_i}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - 2T \end{aligned} \quad [3.94]$$

Da sich für ein stationäres System das Trägheitsmoment mit der Zeit nicht ändert, bleibt nur noch

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -2T \quad [3.95]$$

übrig. Stationär bedeutet in diesem Fall, daß das gravitativ gekoppelte System weder expandiert noch kontrahiert.

Führt man die gleiche Operation mit der rechten Seite von (3.84) aus, dann ergibt sich:

$$-G \sum_{k=1} m_i m_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{r_{ik}^3} \cdot \mathbf{r}_i = -G \sum_{ik} m_i m_k \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{r_{ik}^3} \cdot \mathbf{r}_k = -\frac{1}{2} G \sum_{ik} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} = V \quad [3.96]$$

d.h.

$$T = -\frac{1}{2}V \quad [3.97]$$

Um exakt zu sein, muß man für die kinetische Energie T und für die potentielle Energie V jeweils die Zeitmittel verwenden. Dann erhält man als Ergebnis den Virialsatz:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle V \rangle \quad [3.98]$$

Er besagt, daß in einem abgeschlossenen System, wo die Punktmassen untereinander gravitativ gebunden sind, über einen längeren Zeitraum betrachtet die durchschnittliche kinetische Energie $\langle T \rangle$ die Hälfte der (negativen) potentiellen Energie $\langle V \rangle$ beträgt.

Der Virialsatz hat in der Physik (z.B. statistische Mechanik) und in der Astrophysik eine sehr große Bedeutung. Mit seiner Hilfe kann man z.B. die Massen von Einzelgalaxien und von ganzen Galaxienhaufen abschätzen bzw. bestimmen. Auch in der Theorie der Sternentstehung spielt er eine große Rolle, weil aus ihm die Bedingungen folgen, unter denen eine kühle und neutrale Molekülwolke in Einzelwolken zerfällt aus denen sich wiederum unter bestimmten Voraussetzungen Protosterne bilden können (Jeans-Kriterium).



Literatur zum Thema

K. Lindner: **Taschenbuch der Astronomie**, Fachbuchverlag Leipzig, 1997

H. Bernhard, K.Lindner, M.Schukowski: **Wissensspeicher Astronomie**, Volk und Wissen 1995

A.Unsöld, B.Baschek: **Der neue Kosmos**, Springer-Verlag 2004

A.Weigert, H.J. Wendker: **Astronomie und Astrophysik**. Ein Grundkurs, Wiley-VCH 2004

I. Peterson: **Was Newton nicht wußte. Chaos im Sonnensystem**, Insel-Verlag 2001

I. Ridpath: **Die großen Sternbilder. 88 Konstellationen und ihre Geschichten**, Patmos 2004

J. Kepler: **Astronomia Nova. Neue, ursprünglich begründete Astronomie**, Matrixverlag 2005

S.P. Maran et.al.: **Astronomie für Dummies**, Wiley-VCH 2007

P.S. Harrington: **Sonnen- und Mondfinsternisse beobachten**, Spektrum-Verlag 2002

W.Breda: **Astronomischer Berechnungs-Cocktail. Ein ABC der Himmelsmechanik**, Oculum-Verlag 2007



Index

A

Abendweite 8
Aberration, astronomische 1, 52
Aberrationskonstante 53
Adams, John Couch 67, 72
Akzeleration, säkulare 15
Albrecht von Preußen 69
Alfons X von Kastilien 68
Almagest 31, 68
Almukantarat 40
Anomalie, exzentrische 90, 91
Anomalie, mittlere 90, 95
Anomalie, wahre 82, 90, 91
Antapex 58
Apex 58
Apexgeschwindigkeit der Sonne 60
Apollonius von Perge 31, 67
Apsidenlinie 14
Äquatorialsystem 40, 61
Äquatorkulm 4
Argelander, Friedrich Wilhelm 66
Aristarch von Samos 16, 30, 69
Aristoteles 31
Arnold, Vladimir I. 72
Atomzeit, Internationale 7
Auwers, Arthur Julius 62
Azimut 40

B

Bahnbestimmung 92
Bahnelemente 86
Bahnstörungen 98
Barnard, Edward Emerson 56, 107
Bayer, Johann 65, 66
Benjamin Boss 66
Benzenberg, Johann Friedrich 1
Bessel, Friedrich Wilhelm 2, 55
Bezugsrahmen 62
Bode, Johann Elert 29

Bradley, James 1
Brahe, Tycho 15, 69, 81
Bruno, Giordano 69

C

Clairaut, Alexis Claude 71
Clavius, Christoph 9
Copernicus, Nicolaus 31, 32, 69
Corioliskraft 106

D

Daniel Kirkwood 101
Datum, geodätisches 12
Deferent 31
Deklination 40
Delambre, Jean Baptiste 31
Delporte, Eugene 65
Deterministisches Chaos 109
Dopplereffekt 57
Drehimpulserhaltungssatz 76
Dreieck, Nautisches 44
Dreiecke, Eulersche 36
Dreikörperproblem 103
Dreikörperproblem, eingeschränktes 103
Durchgangsmessungen 62
Durchmusterungen 63
Durchmusterungskatalog 66

E

Eigenbewegung der Sterne 56
Einstein, Albert 31, 72
Ekliptik 8, 29
Ekliptik, Schiefe 8, 50, 62, 97
Ekliptikalsystem 43
Elongation 34
Encke, Johann Franz 94
Energieerhaltungssatz 77
Ephemeride 95, 98
Epizykel 31
Erhaltungssätze 75

Erstes Vertikal 5
Eudoxos von Knidos 31, 32, 68
Evektion 15
Exzeß, sphärischer 36

F

Flamsteed, John 66
Foucault, Jean Bernard 1
Frühlingsäquinoktium 41
Frühlingspunkt 41
Fundamentalastronomie 61
Fundamentalkatalog 62
Fundamentalsterne 61
Fundamentalsystem 61

G

Galaktisches System 43
Galilei, Galileo 35, 69
Galilei-Transformation 74
Galle, Johann Gottfried 72
Gauß, Carl Friedrich 13, 71, 94, 88
Gauß'sche Vektoren 88, 96
Gauß-Krüger-System 12
Geodäsie 62
Geoid 12
Georg III 29
Gezeiten 18
Gezeitenreibung 22
GPS 48
Gregor XIII 9
Große Ungleichheit 15

H

Halbschattenfinsternis 28
Halley, Edmund 15, 56, 71
Hansen, Peter Andreas 94
Harrison, John 11
Heinrich der Seefahrer 47

Henry Cavendish 75
Herschel, Friedrich Wilhelm 29, 60
Hill, George William 108
Hill'sche Grenzfläche 108
Hill-Sphäre 108
Himmelsäquator 4, 8
Himmelsmechanik 67
Himmelspol 3
Hipparch von Nikaia 30, 32, 50, 67
Homer 107
Horizont, mathematischer 4
Horizont, scheinbarer 4
Horizontsystem 39

I

Inertialsystem 61

J

Jacobi-Potential 106
Jahr, bürgerliches 9
Jahr, platonisches 42
Jahr, siderisches 9
Jahr, tropisches 9
Jahreszeiten 8
James Bradley 52
Julianisches Datum 9

K

Kalender, gregorianischer 9
Kant, Immanuel 69
Kepler, Johannes 32, 69, 71, 81, 85
Keplergleichung 90, 91, 95, 96
Keplersches Gesetz, Drittes 85
Keplersches Gesetz, Erstes 83
Keplersches Gesetz, Zweites 81
Kirkwood-Lücken 101
Knotenlinie 14
Kolmogorow, Andrei N. 72

Kolumbus, Christoph 47
Königsgestirnung 33
Konjunktion 34
Koordinaten, geozentrisch 13
Koordinaten, topozentrisch 13
Koordinatentransformationen 44
Kordylesky, Kazimierz 107
Krüger, Johann Heinrich Louis 13
Kulmination 46
Kulmination, obere 5
Kulmination, untere 5

L

Lagrange, Joseph Louis de 71, 103
Lagrangepunkte *Siehe* Librationspunkte
Laplace, Pierre Simon de 67, 69, 71, 103
Laskar, Jacques 110
Leverrier, Urbain Jean Joseph 67, 72
Libration 17
Librationspunkte 103
Local Standard of Rest (LSR) 58
Lunation 14
Luni-Solarpräzession 43
Luther, Martin 69

M

Martell, Karl 68
Melanchton, Philipp 69
Meridian 5
Mittag, wahrer 6
Monate (Mond) 14
Mondbahn 14
Mondfinsternis 23, 28
Mondphasen 16
Morgenweite 8
Moser, Jürgen 72

N

Nachtbogen 8
Nadir 4

Newton, Isaak 32, 67, 69, 71
Nippflut 22
n-Körperproblem 103
Normal Null (NN) 12
Nutation 43, 50, 51

O

Olbers, Wilhelm 94
Opposition 35
Ortsbestimmung, astronomische 47

P

Parallaxe, jährliche 55
Parallaxe, statistische 60
Parallaxe, tägliche 54
Parsek 56
Paul der III 69
Pekuliarbewegung 58
Perigäum 14
Phasenwinkel 35
Philipp II 47
Piazzi, Guiseppe 94
Platon 68
Plutarch 30
Poincare, Henry 72, 103, 110
Polardreieck 38
Polargleichung 82, 88, 91
Polhöhe 4
Positionsastronomie 62
Präzession 43, 50
Präzessionskonstanten 51
Ptolemaios, Claudios 15, 30, 32, 33, 65, 67

Q

Quadratur 35

R

Radialgeschwindigkeit 57
Referenzellipsoide 12
Refraktion 47, 53

Reinhold, Erasmus 69

Rektaszension 41

Resonanzbedingung 100

Resonanzen 100

Resonanzen, Laplace 100

Rhaeticus, Georg Joachim 69

Roche, Edouard 101

Roche-Grenze 101

Rotationsparallaxe 61

Runge-Lenz-Vektor 82

S

Saroszyklus 26

Scaliger, Joseph Justus 9

Schaltregel 9

Scheinbare Himmelskugel 1

Schmetterlingseffekt 109

Schröter, Hieronymus 35

Schrötereffekt 35

Schwab, Gustav 29

Schwarzschild, Karl 72

Schwerpunkterhaltung 77

Scultetus, Zacharias 11

Seiten-Kosinus-Satz 37, 38

Sinus-Satz 39

Sonnenfinsternis 23

Sonnentag, mittlerer 6

Sonnentag, wahrer 6

Springflut 22

Standlinie 47

Staubmonde, Erde 107

Sternbedeckungen 15

Sternbilder 65

Sternkataloge 63

Sterntag 6

Sternzeit 41, 42

Stundenkreis 40

Stundenwinkel 40

Sullivan 46

T

Tagbogen 8, 46

Tageszählung, julianische 9

Tidenhub 22

Tierkreis (Zodiakus) 10

Tisserand, Felix 72

Tisserand-Parameter 99

Trägheitsgesetz 73, 103

Trigonometrie, sphärische 36

Trojaner 107

U

Ungleichheit, lunare 15

UT (Universal Time) 7

V

Variation (der Mondbahn) 15

Virialsatz 112

W

Weltbild, geozentrisches 30

Weltbild, heliozentrisches 32, 69

Weltzeit, koordinierte (UTC) 7

Weltzeit, mittlere (UT) 7

Wende, kopernikanischen 69

Winkel-Kosinus-Satz 38

Wolf, Max 107

Z

Zach, Franz Xaver von 94

Zeitgleichung 6

Zeitzone 6

Zenit 4

Zenitdistanz 40, 46

Zentralkraftfeld 76

Zirkumpolarsterne 8, 46

Zodiakus *Siehe* Tierkreis

Zweikörperproblem 79, 92, 103